測度に基づく様相論理を用いた推論

1F−3 柏 隆裕 村井哲也[†] 宮腰政明 新保 勝
(北海道大学工学部)[†](札幌医科大学衛生短期大学部)

1. はじめに

人間が行なう推論は不完全な証拠にもかかわらず、適切な判断を下す。このような推論は命題論理など古典論理では説明できない。この問題を解決するために、近年さまざまな非単調推論の体系や、TMS(Truth Maintenace System)、ATMS(Assumption-based TMS) などの信念維持システムが研究されている[1]。本論文ではいくつかの様相論理体系で、健全かつ完全であるファジィ測度モデルを応用し、不完全な証拠から到達可能な世界を限定する推論機構を提案する。このシステムの特徴はTMSのように不完全な知識から信念の変更を行ない、信念間の整合性を維持しながら結論を導くところにある。

2. 非単調推論

単調推論を行なう場合、互いに矛盾する定理が導かれてしまうことがあり、この解決策として非単調推論がある。その一つに、無矛盾性を表す様相演算子を古典論理に導入した推論がある。M を様相演算子とすると、Mp は論理式 p が現時点の結論の集合と無矛盾であることを表している。たとえば、

(1) $bird(X) \wedge \mathrm{M}fly(X) \rightarrow fly(X)$

(2) $penguin(X) \rightarrow \neg fly(X)$

(1) は $bird(X)$ であって$\neg fly(X)$ が定理でない限り、$fly(X)$ が成立することを表す。新たに $penguin(X)$ であることが得られれば (2) より$\neg fly(X)$ が定理となり、その時点で $fly(X)$ が成立しなくなる。

3. 様相論理の Dempster-Shafer 測度モデル

[定義1] 様相論理の有限 Dempster-Shafer 測度モデルとは

$$< W, \{bpa_\alpha\}_{\alpha \in W}, V >$$

である。ここで、$W(\neq \phi)$ は可能世界の有限集合、V は原子文に対する付値である。また、bpa_α は W を識別の枠とみなした基本確率割当[2]である：

$$bpa_\alpha : 2^W \rightarrow [0,1],$$

$$bpa_\alpha(\phi) = 0, \sum_{A \subseteq W} bpa_\alpha(A) = 1.$$

様相演算子を含まない文の真理値は通常どうりに定める。bpa_αから導かれる belief 関数 (Bel_α) および plausibility 関数 (Pl_α) に対応する二つの様相演算子を定義する。

[定義2]

(1) $\models_\alpha^{\mathcal{M}} \mathrm{C}p$ (p を確信する) $\Leftrightarrow Bel_\alpha(\|p\|) = 1$

(2) $\models_\alpha^{\mathcal{M}} \mathrm{B}p$ (p を信じる) $\Leftrightarrow Pl_\alpha(\|p\|) = 1$

ここで、$\|p\|$ は文 p の命題である：

$$\|p\| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\alpha \mid \models_\alpha^{\mathcal{M}} p\}.$$

有限 Dempster-Shafer 測度モデルにおいて、演算子をC、Bのみに限定したモデルをそれぞれ有限 belief 関数モデル、有限 plausibility 関数モデルと呼び、各々のモデルがなすクラスを C_{Bel}, C_{Pl} とする。C_{Bel} に関して様相論理体系 KD が、また、C_{Pl} に関して様相論理体系 $EMNP$ が健全かつ完全である[3]。

4. 証拠に基づく可能世界限定モデル

4.1. 可能世界限定モデル

有限個の原子文の集合 $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_n\}$ に対し、証拠に基づく可能世界限定モデルとは、$\mathcal{M} =< W, bpa >$ である。ただし、$W = 2^{\mathcal{P}}$であり、可能な状態記述の有限集合を表す。それぞれの可能世界はリテラルの連言形とみなすことができる。初期状態、すなはち、何も証拠のない状態では W のすべての元が到達可能とみなす。新たな証拠が bpa を更新し、到達可能世界を限定する。ここでは、bpa はすべての到達可能世界で同一であるとする。可能世界限定モデルは有限 Dempster-Shafer 測度モデルの一つである。

4.2. 可能世界限定モデルを利用した信念維持システム

我々の提案する信念維持システムは非単調推論において新たな証拠が獲得された時, 信念の整合性を維持しながら到達可能世界を限定するシステムである。

・単調推論のみの場合のアルゴリズム

1. 推論システムから信念間関係の情報を受けとり、その証拠が成立する可能世界の集合 αを選び出す。
2. 選び出した可能世界 α のべき集合上に基本確率を割当てる (bpa)。
3. それぞれの証拠が表す bpa を Dempster の規則により結合する。bpa_1、bpa_2 をそれぞれの基本確率割当とすると、

$$bpa(A_k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\sum_{A_{1i} \cap A_{2j} = A_k} bpa_1(A_{1i}) \cdot bpa_2(A_{2j})}{1 - \sum_{A_{1i} \cap A_{2j} = \phi} bpa_1(A_{1i}) \cdot bpa_2(A_{2j})}$$

$$bpa(\phi) = 0$$

4. それぞれの可能世界に対して plausibility 関数を求め、その値が1のものを証拠から限定された可能世界とする。

[例1]

p_1を $bird(tweety)$、p_2を $animal(tweety)$ とするとき、初期状態では到達可能世界として、

$$\alpha_1 = \{p_1, p_2\}, \quad \alpha_2 = \{p_1\}, \quad \alpha_3 = \{p_2\}, \quad \alpha_4 = \phi$$

の四つの可能性がある。

$$(1) \quad p_1, \qquad (2) \quad p_1 \rightarrow p_2$$

とする。まず、証拠 (1) に対して p_1を真とする世界の集合は

$$\|p_1\| = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

となり、この集合に基本確率1を割り当てる：

$$bpa_1(\|p_1\|) = 1.$$

この段階で、それぞれの世界について Plを求めると

$$Pl(\{\alpha_1\}) = Pl(\{\alpha_2\}) = 1,$$

それ以外は0となり、世界は $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ に限定される。次に、証拠 (2) に対して、$p_1 \rightarrow p_2$ を真とする世界の集合は

$$\|p_1 \rightarrow p_2\| = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$$

A Reasonig Method Using Measure-based Modal Logic
Takahiro KASHIWA, Tetuya MURAI[1], Masaaki MIYAKOSHI, Masaru SHINBO
Hokkaido University, [1]School of Allied Health Professions, Sapporo Medical College
E-mail kashi@ips1.huie.hokudai.ac.jp

となり、この集合に基本確率 1 を割り当てる：

$$bpa_2(\|p_1 \to p_2\|) = 1.$$

証拠を Dempster の規則で結合すると

$$bpa_{12}(\{\alpha_1\}) = 1$$

となり、$Pl(\{\alpha_1\}) = 1$ であるから、世界は $\{\alpha_1\}$ に限定される。つまり、tweety は鳥であって、動物である。

・非単調推論を含む場合のアルゴリズム

1. 推論システムから信念間関係の情報を受けとり、単調推論で得られる証拠が成立する可能世界の集合 α を選び出す。
2. 選び出した可能世界 α のべき集合上に基本確率を割当てる (bpa)。
3. それぞれの証拠が表す bpa を Dempster の規則により結合する。
4. 単調推論により限定された集合を $\mathcal{W}'$ とする。
5. $\mathcal{W}'$ のもとで様相演算子を含む非単調推論から得られる可能世界の集合を選び出す。
6. すべての証拠を結合する。
7. それぞれの可能世界に対して、plausibility 関数を求め、その値が 1 であるものを証拠から限定された可能世界とする。

様相演算子 M は確信演算子 C の双対として定義する ：

$$\models_\alpha^{\mathcal{M}} \mathrm{M}p \quad \Leftrightarrow \quad \models_\alpha^{\mathcal{M}} \neg \mathrm{C}\neg p.$$

つまり、p でないことを確信できない時に、Mp は成立すると考える。Mp を plausibility 関数で表すと ：

$$\models_\alpha^{\mathcal{M}} \mathrm{M}p \quad \Leftrightarrow \quad Pl(\|p\|) > 0.$$

となる。

[例 2]

p_1を $bird(tweety)$、p_2を $fly(tweety)$、p_3を $penguin(tweety)$ とすると、何も証拠が得られていない時、到達可能世界として

$$\alpha_1 = \{p_1, p_2, p_3\},$$

$$\alpha_2 = \{p_1, p_2\}, \quad \alpha_3 = \{p_1, p_3\}, \quad \alpha_4 = \{p_2, p_3\},$$

$$\alpha_5 = \{p_1\}, \quad \alpha_6 = \{p_2\}, \quad \alpha_7 = \{p_3\},$$

$$\alpha_8 = \phi,$$

の八つの可能性がある。

$$(1) \quad p_1 \wedge \mathrm{M}p_2 \to p_2, \qquad (2) \quad p_3 \to \neg p_2, \qquad (3) \quad p_1$$

という証拠があるとする。はじめに、様相演算子を含まない単調推論 (この場合は証拠 (2)、(3) にあたる) によって限定される世界から求める。p_1を真とする世界の集合は

$$\|p_1\| = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$$

となり、この集合に基本確率 1 を割り当てる ：

$$bpa_1(\|p_1\|) = 1.$$

また、$p_3 \to \neg p_2$ を真とする世界の集合は

$$\|p_3 \to \neg p_2\| = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$$

となり、この集合に基本確率を割り当てる ：

$$bpa_2(\|p_3 \to \neg p_2\|) = 1.$$

bpa_1 と bpa_2 を Dempster の規則を用いて結合すると

$$bpa_{12}(\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}) = 1$$

となる。$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ は単調な世界から限定した世界であり、$\mathcal{W}'$ とおく。

次に、非単調推論から得られる可能世界を選び出す。

$p_1 \wedge \mathrm{M}p_2 \to p_2$ を真とする世界の集合は

$$\begin{aligned} \|p_1 \wedge \mathrm{M}p_2 \to p_2\| &= \|p_1\|^c \cup \|\mathrm{M}p_2\|^c \cup \|p_2\| \\ &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\} \cup \|\mathrm{M}p_2\|^c \end{aligned}$$

となる。Mp_2 を真とする可能世界の集合は

$$Pl(\|p_2\|) = Pl(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}) > 0$$

であるので、

$$\mathcal{W}' \subseteq \|\mathrm{M}p_2\| \Leftrightarrow \|\mathrm{M}p_2\|^c \subseteq \mathcal{W}'^c = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$$

から、

$$\|p_1 \wedge \mathrm{M}p_2 \to p_2\| = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$$

となり、$\|p_1 \wedge \mathrm{M}p_2 \to p_2\|$ に基本確率 1 を割り当てる：

$$bpa_3(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}) = 1.$$

したがって、証拠 (1) は世界限定としては $p_1 \to p_2$ と同一の働きをする。bpa_{12}と bpa_3を結合して

$$bpa_{123}(\{\alpha_2\}) = 1, \qquad Pl(\{\alpha_2\}) = 1$$

となり、世界は $\{\alpha_2\}$ に限定される。つまり、tweety は飛ぶことのできる鳥であって、ペンギンでないことがわかる。

新たに証拠 (4) p_3が得られた時、同様に基本確率を求めると

$$bpa_1(\|p_1\|) = bpa_1(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}) = 1$$

$$bpa_2(\|p_3 \to \neg p_2\|) = bpa_2(\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}) = 1$$

$$bpa_3(\|p_3\|) = bpa_3(\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7\}) = 1$$

これらを結合すると $bpa_{123}(\{\alpha_3\}) = 1$ 、$\mathcal{W}' = \{\alpha_3\}$ が得られ、$\|p_1 \wedge \mathrm{M}p_2 \to p_2\|$ を求めると

$$Pl(\|p_2\|) = Pl(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}) = 0$$

$$\phi \subseteq \|\mathrm{M}p_2\| \subseteq \{\alpha_3\}^c$$

となる。ゆえに、

$$\|p_1 \wedge \mathrm{M}p_2 \to p_2\| = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$$

であるから

$$bpa_4(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}) = 1$$

となり、証拠 (1) は世界を限定しないことがわかる。最終的にすべてを統合すると、

$$bpa_{1234}(\{\alpha_3\}) = 1, \quad Pl(\{\alpha_3\}) = 1$$

となり、tweety は飛べない鳥であって、ペンギンであることが信念として求まる。

5. まとめ

可能世界限定モデルを用いた信念維持システムは新たな証拠の獲得とともに、信念を維持しながら到達可能世界を限定することができる。また、様相演算子を用いた非単調推論についても、本システムの有効性を確認した。bpa を単純支持関数にし、$0 \leq bpa \leq 1$ の重みを証拠に与えることによって、より柔軟に知識が表現できるのではないかと考えられる。

文献

[1] M.L.Ginsberg, Readings in Nonmonotonic Reasonig. Morgan Kaufmann, 1987.

[2] G.Shafer, A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press , 1976.

[3] 村井, 宮腰, 新保, 種々のファジィ測度の族が決定する様相論理体系. 第 8 回ファジィ・システム・シンポジウム講演論文集, 1992, 29-32.