区分有理 Bézier 曲線を表現する有理 B-spline 曲線の C^1 再パラメータ化

徳 山 喜 政† 今 野 晃 市††

複数本の有理 Bézier 曲線セグメントで構成される区分有理 Bézier 曲線は，両端のノットの多重度が (次数 + 1) 個で，各中間ノットの多重度が (次数) 個であるような有理 B-spline 曲線で表現できる．3 次元空間において，曲線セグメントの共有点における微分ベクトルが等しければ，セグメントどうしの共有点では C^1 連続である．しかし，多くの場合には，3 次元空間における曲線セグメントどうしが C^1 連続であっても，同次座標空間における曲線セグメントどうしの連続性が C^1 連続とは限らない．同次座標空間における曲線セグメントどうしの連続性が C^0 連続である場合には，表現する有理 B-spline 曲線の各中間ノットの多重度を減らすことができない．このような有理 B-spline 曲線を利用してスキニングなどの曲面を生成する場合には，生成した曲面が C^0 連続になる場合が多い．そこで，本論文では，区分有理 Bézier 曲線を有理 B-spline 曲線で表現するとき，形状と次数を保ったままで各中間ノットの多重度を減らし，同次座標空間における曲線セグメントどうしの連続性が C^1 連続になるように再パラメータ化する手法を提案する．

C^1 Reparameterization of a Rational B-spline Curve which Represents a Piecewise Rational Bézier Curve

Yoshimasa Tokuyama† and Kouichi Konno††

A piecewise rational Bézier curve is constituted by several rational Bézier curve segments. It can be represented by a rational B-spline curve that the multiplicity of each interior knot equals degree. Although the curve segments are C^1 continuous in current space, they may be C^0 continuous in homogenerous space. In this case, the multiplicity of each interior knot can not be reduced and the B-spline basis function becomes C^0 continuous. The surface generation method by skinning rational B-spline curves to construct an interpolatory surface may generate surfaces with C^0 continuity. This paper presents a reparameterization method for reducing the multiplicity of each interior knot to make the curve segments C^1 continuous in homogenerous space. The reparameterized rational B-spline curve with standard form has the same shape and degree as before.

1. はじめに

スキニング，スイープ，ルールド，回転などの曲面生成操作では，B-spline 曲面または有理 B-spline 曲面で形状を表現するのが一般的であり，操作対象となる特徴線は B-spline 曲線または有理 B-spline 曲線で表現されることが多い．B-spline 曲線を設計する方法の 1 つに，複数の Bézier 曲線を端点で連結した区分 Bézier 曲線を利用する方法がある[8)]．実用上では有理 B-spline 曲線がよく使われるが，この場合は前述した方法を拡張して，区分曲線を有理 Bézier 曲線とした区分有理 Bézier 曲線を利用して設計することがある．この方法は一般に次のようなステップにより構成される．

(1) 直線，円弧（または有理 Bézier 曲線），Bézier 曲線を滑らかに接合することにより区分有理 Bézier 曲線を構成する．

(2) 区分有理 Bézier 曲線を両端のノットの多重度が (次数 + 1) 個で，各中間ノットの多重度が (次数) 個であるような有理 B-spline 曲線で表現する．有理 B-spline 曲線のノットベクトルの計算方法は文献 2) を参照できる．

(3) 有理 B-spline 曲線の各中間ノットの多重度をできるだけ減らす．ノット削除の方法は文献 8) を参照できる．

† 株式会社リコー画像システム事業本部ソフトウエア研究所
R&D Group, Software Research Center, RICOH COMPANY LTD.
†† ラティス・テクノロジー株式会社インターネットグラフィックス事業部
Internet Graphics Division, LATTICE TECHNOLOGY, INC.

3 次元空間において，曲線セグメントの共有点における微分ベクトルが等しければ，セグメントどうしの共有点では C^1 連続である．しかし，多くの場合には，3 次元空間における曲線セグメントどうしが C^1 連続であっても，同次座標空間における曲線セグメントどうしの連続性が C^1 連続とは限らない．同次座標空間における曲線セグメントどうしの連続性が C^0 連続である場合には，表現する有理 B-spline 曲線の各中間ノットの多重度を (次数 − 1) 個に減らすことができない．逆にいえば，各中間ノットの多重度を (次数 − 1) 個に減せられなければ，同次座標空間における曲線セグメントどうしの連続性は C^0 連続である．たとえば，中心角が 90° の 1 つの円弧と直線から構成される 2 次有理 B-spline 曲線の場合，ノットベクトルは [0,0,0,t,t,1,1,1] で表現され，中間ノット t の多重度は 2 になるので，同次座標空間における曲線セグメントどうしの連続性は C^0 連続である[7]．有理 B-spline 曲線からスキニング曲面を生成する場合，まず，同次座標空間における曲線をブレンディングすることによって曲面を生成し，生成した曲面を 3 次元空間に射影することによって 3 次元空間のスキニング曲面を生成する[3),4),7]．しかし，同次座標空間における曲線セグメントどうしの連続性が C^0 連続であれば，生成されるスキニング曲面が C^0 連続になる場合が多い[7]．一方，生成されるスキニング曲面が C^1 連続 になるのが望ましい．

同次座標空間における曲線の連続性を改善するため，いくつかの方法が提案されている．たとえば，区分有理 Bézier 曲線が円弧のセグメントから構成される場合，文献 6) では，パラメータを保ったままで，ある条件の中間ノットの多重度を減らす方法が提案されている．しかし，この方法は一般的な手法ではないため，C^0 連続のノットが残る．Chou[1]は円を中間ノットを持たない高次の有理 Bézier 曲線で表現する手法を提案した．しかし，この方法は，曲線の次数が上がってしまうという欠点がある．区分有理 Bézier 曲線が直線，円弧，Bézier 曲線のセグメントから構成される場合，Hohmeyer ら[4]は smoothing function を利用して同次座標空間における曲線の連続性を改善していた．しかし，この方法も曲線の次数が上がってしまうという欠点がある．

有理 B-spline 曲線の各中間ノットの多重度を (次数 − 1) 個に減らせば，3 次元空間および同次座標空間における曲線セグメントどうしの連続性がともに C^1 連続になる．本論文では，形状と次数を保ったままで，有理 B-spline 曲線で表現される区分有理 Bézier 曲線を再パラメータ化することによって，各中間ノットの多重度を (次数 − 1) 個に変更する方法を提案する．

2. 区分有理 Bézier 曲線を表現する有理 B-spline 曲線

区分有理 Bézier 曲線 $\mathbf{C}(u)$ は m 本の曲線セグメント $\mathbf{C}_i(u), i = 0, \cdots, m-1$ から構成されているとする．$\mathbf{C}_i(u)$ はパラメータ区間 $[u_i, u_{i+1}]$ で定義されている．ここで，$u_0 < u_1 < \cdots < u_{m-1} < u_m$ とする．$\mathbf{C}(u)$ は，次数が p 次で，かつ両端のノットの多重度が $(p+1)$ 個で，各中間ノットの多重度が (p) 個であるような有理 B-spline 曲線で表現することができる[2),9]．

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i}, \tag{1}$$

ここで，ノットベクトル U は

$$U = [\underbrace{u_0, \cdots, u_0}_{(p+1)\text{ 個}}, \underbrace{u_1, \cdots, u_1}_{p\text{個}}, \cdots, \underbrace{u_{m-1}, \cdots, u_{m-1}}_{p\text{個}}, \underbrace{u_m, \cdots, u_m}_{(p+1)\text{ 個}}]$$

である．また，$n = mp$, $N_{i,p}(u)$ は p 次 B-spline 基底関数とし，$\mathbf{P}_i$, w_i はそれぞれ制御点と重みとする．

次に，同次座標空間における $\mathbf{C}(u)$ の表現式は次のようになる．

$$\mathbf{C}^w(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w. \tag{2}$$

ここで，$\mathbf{P}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$ である．

3 章では，まず 2 本の 3 次有理 Bézier 曲線セグメントを用いて，区分有理 Bézier 曲線の再パラメータ化の基本概念を述べ，その後，4 章で 2 本の場合を一般化した m 本の p 次曲線セグメントから構成される区分有理 Bézier 曲線の再パラメータ化を説明する．

3. 2 本の 3 次曲線セグメントの再パラメータ化

図 1 に 2 本の 3 次有理 Bézier 曲線セグメント $\mathbf{C}_0(u)$ と $\mathbf{C}_1(u)$ を示す．$\mathbf{C}_0(u)$ と $\mathbf{C}_1(u)$ はそれぞれパラメータ区間 $[u_0, u_1]$，$[u_1, u_2]$ で定義されると仮定する．2 曲線の共有点は $\mathbf{P}_{0,3}\ (= \mathbf{P}_{1,0})$ であり，それぞれの重み $w_{0,3}$，$w_{1,0}$ は同一であるとする．また，共有点の両側の制御点 $\mathbf{P}_{0,2}$ と $\mathbf{P}_{1,1}$ および $\mathbf{P}_{0,3}$ の 3 点は 3 次元空間で同一直線上にある．すなわち，$\mathbf{C}_0(u)$ と $\mathbf{C}_1(u)$ は滑らかに接続していると仮定する．

区分有理 Bézier 曲線を表現する有理 B-spline 曲線に対して次のような条件を満たすように再パラメータ

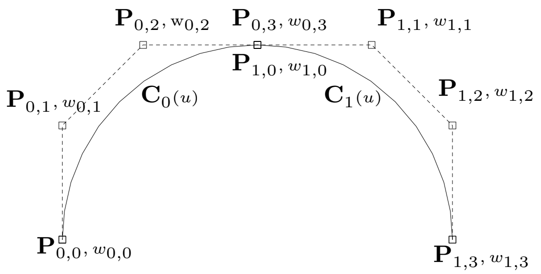

図 1　2 本の 3 次曲線セグメントで構成される区分有理 Bézier 曲線
Fig. 1　Piecewise rational Bézier curves constituted by two curve segments.

化を行う．

- 共有点 $\mathbf{P}^w_{0,3}$ に対応する新しいノットの多重度が 1 つ減らされる．
- $\mathbf{C}_0(u)$ と $\mathbf{C}_1(u)$ はそれぞれ新しいパラメータ区間 $[\hat{u}_0, \hat{u}_1]$，$[\hat{u}_1, \hat{u}_2]$ に定義される．
- 重み $w_{1,1}$，$w_{1,2}$，$w_{1,3}$ はそれぞれ $\hat{w}_{1,1}$，$\hat{w}_{1,2}$，$\hat{w}_{1,3}$ に変更される．ここで，重みは正であるとする．
- $\mathbf{C}_0(u)$ と $\mathbf{C}_1(u)$ の次数と形状は変化しない．

共有点 $\mathbf{P}^w_{0,3}$ に対応する新しいノットの多重度を 1 つ減らすためには，次の条件を満たせば十分である[8]．

$$w_{0,3} = (1-\hat{\alpha})w_{0,2} + \hat{\alpha}\hat{w}_{1,1}, \tag{3}$$

$$w_{0,3}\mathbf{P}_{0,3} = (1-\hat{\alpha})w_{0,2}\mathbf{P}_{0,2} + \hat{\alpha}\hat{w}_{1,1}\mathbf{P}_{1,1}, \tag{4}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\Delta\hat{u}_0}{\Delta\hat{u}_0 + \Delta\hat{u}_1}. \tag{5}$$

ここで，$\Delta\hat{u}_0 = \hat{u}_1 - \hat{u}_0$ および $\Delta\hat{u}_1 = \hat{u}_2 - \hat{u}_1$ である．$\Delta\hat{u}_0$ と $\Delta\hat{u}_1$ はそれぞれ $\mathbf{C}_0(u)$ と $\mathbf{C}_1(u)$ のパラメータ長さである．$\hat{\alpha}$ はパラメータ長さの比である．したがって，$\hat{\alpha}$ は 0 より大きく，1 より小さくなければならない．

本論文では，$\hat{\alpha}$ と $\hat{w}_{1,1}$ を未知数と見なす．$\mathbf{P}_{0,2}$，$\mathbf{P}_{0,3}$，$\mathbf{P}_{1,1}$ は同一直線上にあるので，式 (3) の $\hat{\alpha}\hat{w}_{1,1}$ を式 (4) に代入すれば，スカラー $\hat{\alpha}$ は次の式より計算できる．

$$\hat{\alpha} = \frac{w_{0,2}\,|\mathbf{P}_{1,1}-\mathbf{P}_{0,2}| - w_{0,3}\,|\mathbf{P}_{1,1}-\mathbf{P}_{0,3}|}{w_{0,2}\,|\mathbf{P}_{1,1}-\mathbf{P}_{0,2}|}. \tag{6}$$

ここで，$|\mathbf{P}_{1,1} - \mathbf{P}_{0,2}|$ などは 2 点間の距離を意味する．式 (6) から $\hat{\alpha}$ が得られれば，新しい重み $\hat{w}_{1,1}$ は式 (3) から計算できる．前述した条件にあるように，$\mathbf{C}_1(u)$ の形状を保つための $w_{1,1}$ の変更を $w_{1,2}$，$w_{1,3}$ へ反映しなければならない．文献 5) で，p 次有理 Bézier 曲線の各制御点の重みを次の式より再計算しても曲線の形状は不変であることが示されているので，これを利用する．

$$\hat{w}_i = K^i w_i, \qquad (i = 0, \cdots, p). \tag{7}$$

ここで w_i，$\hat{w}_i$ はそれぞれ元の重み，新しい重みである．K は正の定数であり，K^i は K の累乗を意味する．

2 本の 3 次 Bézier 曲線のケースでは，$K = \hat{w}_{1,1}/w_{1,1}$ とおき，$\hat{w}_{1,2}$，$\hat{w}_{1,3}$ を再計算すれば，曲線セグメント $\mathbf{C}_1(u)$ の形状が保たれる．なお，有理 B-spline 曲線の新しいノットベクトルは $\hat{\alpha}$ から計算できる[2]．以上の方法によって，式 (3)，(4) および (5) は満たされるので，共有点 $\mathbf{P}^w_{0,3}$ に対応する新しいノットの多重度を 1 つ減らすことができる．また，制御点 $\mathbf{P}^w_{0,3}$ を除去することができる．

4. m 本の p 次曲線セグメントの再パラメータ化

3 本以上の曲線セグメントから構成される区分有理 Bézier 曲線の場合，隣り合う 2 本の曲線セグメントに対して，3 章で説明したプロセスを再帰的に行うことで再パラメータ化することができる．式 (6) より，1 本目と 2 本目の曲線セグメントに着目したときに，長さ $|\mathbf{P}_{1,1} - \mathbf{P}_{0,2}|$ と $|\mathbf{P}_{1,1} - \mathbf{P}_{0,3}|$ をそれぞれ L と l とすれば，$\hat{\alpha}$ は次の式で表現できる．

$$\hat{\alpha} = 1 - \frac{w_{0,3}l}{w_{0,2}L}. \tag{8}$$

式 (5) より，$0 < \hat{\alpha} < 1$ という条件を満たさなければならない．そのため，$w_{0,3}l$ は $w_{0,2}L$ より小さくなければならない．しかし，再帰的な処理において，2 本目の曲線セグメントの重みを計算するとき，もしつねに 1 本目の曲線セグメントの重みを固定すると，2 本目の曲線セグメントの新しい重みを計算するときに K（式 (7) の定数）が 1 より大きい場合には，$w_{0,3}l$ は $w_{0,2}L$ より大きくなる可能性がある．この状態が発生すると，$0 < \hat{\alpha} < 1$ という条件を満たさなくなり，再パラメータ化に失敗する．

この問題を避けるため，我々は区分有理 Bézier 曲線の最初の曲線セグメントの重みの変更も考慮し，バランス良く各曲線セグメントの重みを調整する方法を提案する．以下に m 本の p 次曲線セグメント（たとえば，**図 2** において，$m = 5$，$p = 3$）から構成される区分有理 Bézier 曲線について説明する．なお，ここで，1 本目の曲線セグメントの始点の重み $w_{0,0}$ を 1 とする．もし，$w_{0,0}$ が 1 でなければ，すべての重みを定数倍にしても曲線形状が変わらないという性質を利用して，$w_{0,0}$ が 1 になるように調整する．

式 (3)，(4) および (5) を隣り合う曲線セグメントの共有点に適用すると，重みが変更される．よって，適用後の重みを考慮した方程式を立てる必要がある．

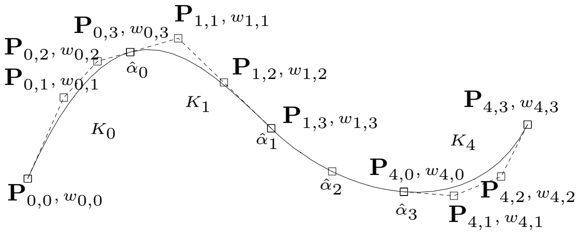

図 2　5 本曲線セグメントから構成される区分有理 Bézier 曲線
Fig. 2　Piecewise rational Bézier curve constituted by 5 curve segments.

本手法では，まず重みが変更されたときの共有点での関係式を導出し，その式を式 (3)，(4) および (5) に適用することによって連立方程式を立てる．ここで，我々は隣り合う曲線セグメントのパラメータ長さの比 $\hat{\alpha}_0, \cdots, \hat{\alpha}_{m-2}$ を規定し，それぞれの曲線セグメントに式 (7) の定数 $K_0, \cdots, K_{m-1}$ を規定する．

1 本目の曲線セグメントの新しい重みの計算

式 (7) より，1 本目の曲線セグメントの新しい重みと現在の重みの関係式は式 (9) のようになる．

$$\hat{w}_{0,0} = w_{0,0} = 1,$$
$$\hat{w}_{0,r} = K_0^r w_{0,r}, \quad (r = 1, 2, \cdots, p). \tag{9}$$

2 本目の曲線セグメントの新しい重みの計算

1 本目の曲線セグメントの終点の重みが変更されたので，2 本目の曲線セグメントの重みを次のように定数倍する必要がある．

$$w'_{1,0} = K_0^p w_{0,p} = K_0^p w_{1,0},$$
$$w'_{1,r} = K_0^p w_{1,r}, \quad (r = 1, 2, \cdots, p). \tag{10}$$

また，1 本目と同様に，式 (7) より，2 本目の曲線セグメントの新しい重みを次のようにさらに調整する．

$$\hat{w}_{1,0} = w'_{1,0} = K_0^p w_{1,0},$$
$$\hat{w}_{1,r} = K_1^r w'_{1,r} = K_1^r K_0^p w_{1,r}, \quad (r = 1, 2, \cdots, p). \tag{11}$$

m 本目の曲線セグメントの新しい重みの計算

以上のように共有点における重みを形状が変化しないように調整すると，m 本目では，次式のような関係式が導出できる．

$$\hat{w}_{m-1,0} = K_{m-2}^p \cdots K_0^p w_{m-1,0},$$
$$\hat{w}_{m-1,r} = K_{m-1}^r K_{m-2}^p \cdots K_0^p w_{m-1,r}, \quad (r = 1, 2, \cdots, p). \tag{12}$$

共有点での連立方程式

式 (12) を式 (3) と (4) の条件式に適用すれば，隣り合う曲線セグメントの共有点での連立方程式が次のように導出できる．

$$K_0^p \cdots K_{m-2}^p w_{m-2,p} = (1 - \hat{\alpha}_{m-2}) K_0^p \cdots K_{m-2}^{p-1} w_{m-2,p-1} + \hat{\alpha}_{m-2} K_0^p K_{m-2}^p K_{m-1} w_{m-1,1}, \tag{13}$$

$$K_0^p \cdots K_{m-2}^p w_{m-2,p} \mathbf{P}_{m-2,p} = (1 - \hat{\alpha}_{m-2}) K_0^p \cdots K_{m-2}^{p-1} w_{m-2,p-1} \mathbf{P}_{m-2,p-1} + \hat{\alpha}_{m-2} K_0^p \cdots K_{m-2}^p K_{m-1} w_{m-1,1} \mathbf{P}_{m-1,1}. \tag{14}$$

また，式 (13)，(14) は，次のように整理できる．

$$K_{m-2} w_{m-2,p} = (1 - \hat{\alpha}_{m-2}) w_{m-2,p-1} + \hat{\alpha}_{m-2} K_{m-2} K_{m-1} w_{m-1,1}, \tag{15}$$

$$K_{m-2} w_{m-2,p} \mathbf{P}_{m-2,p} = (1 - \hat{\alpha}_{m-2}) w_{m-2,p-1} \mathbf{P}_{m-2,p-1} + \hat{\alpha}_{m-2} K_{m-2} K_{m-1} w_{m-1,1} \mathbf{P}_{m-1,1}. \tag{16}$$

式 (15) より，$\hat{\alpha}_{m-2}$ は次のように導出できる．

$$\hat{\alpha}_{m-2} = \frac{K_{m-2} w_{m-2,p} - w_{m-2,p-1}}{K_{m-2} K_{m-1} w_{m-1,1} - w_{m-2,p-1}}. \tag{17}$$

式 (17) を式 (16) に代入して整理すると，次の式が得られる．

$$K_{m-2} K_{m-1} w_{m-2,p} w_{m-1,1} |\mathbf{P}_{m-2,p} - \mathbf{P}_{m-1,1}| - K_{m-1} w_{m-2,p-1} w_{m-1,1} |\mathbf{P}_{m-2,p-1} - \mathbf{P}_{m-1,1}| + w_{m-2,p-1} w_{m-2,p} |\mathbf{P}_{m-2,p-1} - \mathbf{P}_{m-2,p}| = 0. \tag{18}$$

終点条件

最後の曲線セグメントの終点の新しい重みを 1 にするため，式 (12) より，次の条件式を与える．

$$\hat{w}_{m-1,p} = K_{m-1}^p K_{m-2}^p \cdots K_0^p w_{m-1,p} = 1. \tag{19}$$

非線形方程式

式 (18) をそれぞれ隣り合う曲線セグメントの共有点に適用し，さらに式 (19) の終点条件を利用すれば，次の方程式が得られる．

$$\begin{aligned}
&K_0 K_1 w_{0,p} w_{1,1} |\mathbf{P}_{0,p} - \mathbf{P}_{1,1}| - K_1 w_{0,p-1} w_{1,1} |\mathbf{P}_{0,p-1} - \mathbf{P}_{1,1}| + w_{0,p-1} w_{0,p} |\mathbf{P}_{0,p-1} - \mathbf{P}_{0,p}| = 0, \\
&\qquad \vdots \\
&K_{m-2} K_{m-1} w_{m-2,p} w_{m-1,1} |\mathbf{P}_{m-2,p} - \mathbf{P}_{m-1,1}| - K_{m-1} w_{m-2,p-1} w_{m-1,1} |\mathbf{P}_{m-2,p-1} - \mathbf{P}_{m-1,1}| + w_{m-2,p-1} w_{m-2,p} |\mathbf{P}_{m-2,p-1} - \mathbf{P}_{m-2,p}| = 0, \\
&K_{m-1}^p K_{m-2}^p \cdots K_0^p w_{m-1,p} = 1.
\end{aligned} \tag{20}$$

ここで，$K_0, \cdots, K_{m-1}$ は未知数である．式 (20) は m 個の未知数と m 個の方程式を持つ非線形

連立方程式である．我々は $K_0, \cdots, K_{m-1}$ の初期値を 1 とし，ニュートン法を用いて解く．式 (20) の解 $K_0, \cdots, K_{m-1}$ を式 (12) に代入することで，各曲線セグメントの新しい重みを計算できる．また，式 (20) の解 $K_0, \cdots, K_{m-1}$ を式 (17) に代入することで，$\hat{\alpha}_0, \cdots, \hat{\alpha}_{m-2}$ を計算できる．得られた $\hat{\alpha}_0, \cdots, \hat{\alpha}_{m-2}$ と式 (5) から有理 B-spline 曲線で表現するときのノットベクトルを計算できる．結果となる有理 B-spline 曲線の各中間ノットの多重度は $(p-1)$ 個である．なお，$K_0, \cdots, K_{m-1}$ は正の数でなければならない．また，式 (17) より得られた $\hat{\alpha}_i \, (i = 0, \cdots, m-2)$ の値は 0 より大きく，1 より小さくなければならない．そうでなければ，解が存在しない．たとえば，**図 3** では，2 本の 90° 円弧で構成される 2 次の区分有理 Bézier 曲線を示す．各制御点の重みは次のとおりである．

$w = 1, 0.707107, 1, 0.707107, 1.$

また，距離 $|\mathbf{P}_{0,1} - \mathbf{P}_{0,2}|$ と距離 $|\mathbf{P}_{0,2} - \mathbf{P}_{1,1}|$ は同じである．この場合において，式 (20) の解 K_0，K_1 はそれぞれ 0.707107，1.414214 であるが，式 (17) より計算された $\hat{\alpha}_0$ の値は無限大値となる．

5. 実　行　例

ここで，実行例を用いて，4 章で述べた再パラメータ化の有効性を示す．**図 4** (a) は Bézier 曲線と円弧から構成される区分有理 Bézier 曲線を示す．図 4 (b) は区分有理 Bézier 曲線を表現する有理 B-spline 曲線の制御点を示す．有理 B-spline 曲線のノットベクトルと各制御点の重みを次に示す．

$$U = [0, 0, 0, 0, 0.604776, 0.604776, 0.604776, 1, 1, 1, 1],$$

$$w = 1, 1, 1, 1, 0.804738, 0.804738, 1.$$

図 4 (c) は再パラメータ化を行った後の有理 B-spline 曲線の制御点を示す．変換後のノットベクトルと各制御点の重みを次に示す．

$$U_{new} = [0, 0, 0, 0, 0.604776, 0.604776, 1, 1, 1, 1],$$

$$w_{new} = 1, 0.709706, 0.625897, 0.777765, 0.881910, 1.$$

各中間ノットの多重度が 1 つ減り，それに対応する制御点が除去された（図 4 (c)）．各制御点の重みも変更されたが，両端点の重みはともに 1 である．

図 5 (a) は区分有理 Bézier 曲線の複雑なケースを示す．この曲線は直線，Bézier 曲線，円弧から構成され，曲線のセグメントの数は 7 である．図 5 (b) は区分有理 Bézier 曲線を表現する有理 B-spline 曲線の制御点

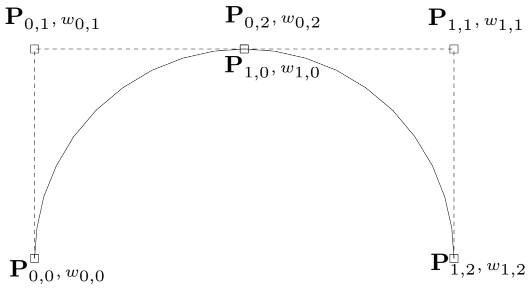

図 3　2 本の 90° 円弧で構成される区分有理 Bézier 曲線
Fig. 3　Piecewise rational Bézier curve constituted by two 90° arcs.

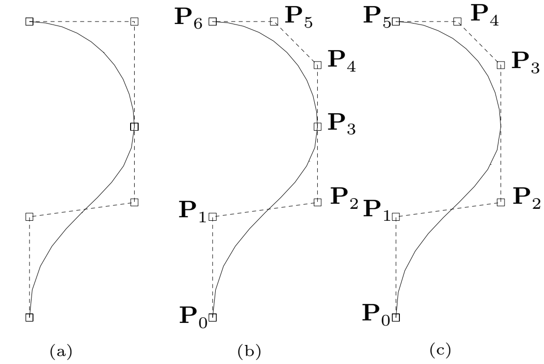

図 4　(a) 区分有理 Bézier 曲線，(b) 有理 B-spline 曲線，(c) 再パラメータ化後の有理 B-spline 曲線
Fig. 4　(a) Piecewise rational Bézier curve, (b) rational B-spline curve, (c) reparameterized rational B-spline curve.

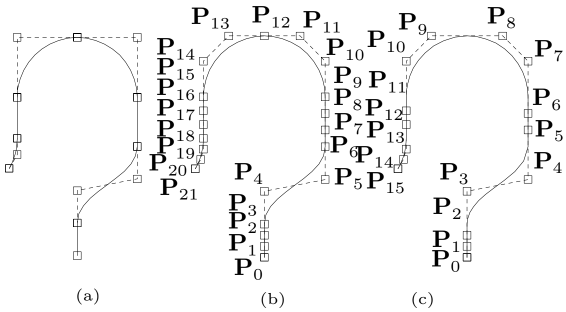

図 5　(a) 区分有理 Bézier 曲線，(b) 有理 B-spline 曲線，(c) 再パラメータ化後の有理 B-spline 曲線
Fig. 5　(a) Piecewise rational Bézier curve, (b) rational B-spline curve, (c) reparameterized rational B-spline curve.

を示す．ノットベクトルと各制御点の重みを次に示す．

$$U = [0, 0, 0, 0, 0.077810, 0.077810, 0.077810, 0.308703, 0.308703, 0.308703, 0.425418, 0.425418, 0.425418, 0.627157, 0.627157, 0.627157, 0.828896, 0.828896, 0.828896, 0.926158, 0.926158, 0.926158, 1, 1, 1, 1],$$

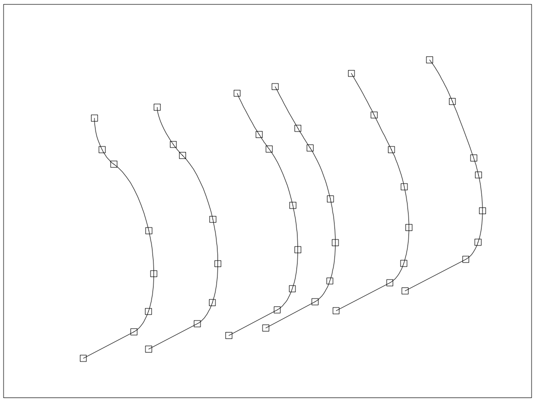

図 6　区分有理 Bézier 曲線
Fig. 6　Piecewise rational Bézier curves.

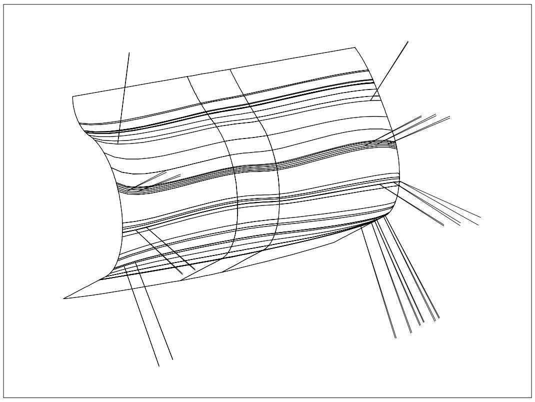

図 8　スキニング曲面の法線ベクトル表示
Fig. 8　Normal vectors of skinned surface.

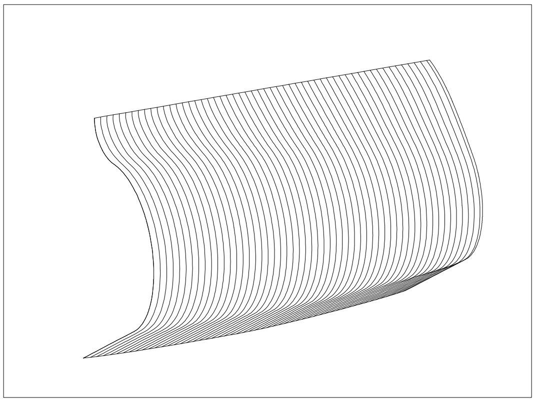

図 7　スキニング曲面の断面線表示（その 1）
Fig. 7　Contour lines of skinned surface (first).

$$w = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0.804738, 0.804738, 1, 0.804738, 0.804738, 1, 1, 1, 1, 0.977284, 0.977284, 1.$$

図 5 (c) は再パラメータ化を行った後の有理 B-spline 曲線の制御点を示す．変換後のノットベクトルと各制御点の重みを次に示す．

$$U_{new} = [0, 0, 0, 0, 0.204646, 0.204646, 0.471928, 0.471928, 0.536741, 0.536741, 0.620284, 0.620284, 0.727227, 0.727227, 0.830835, 0.830835, 1, 1, 1, 1],$$

$$w_{new} = 1, 0.757221, 0.573384, 0.252367, 0.146689, 0.070368, 0.058075, 0.034852, 0.031492, 0.040313, 0.057109, 0.142607, 0.202286, 0.425154, 0.644590, 1.$$

各中間ノットの多重度が 1 つ減り，それに対応する制御点が除去された（図 5 (c)）．各制御点の重みも変更されたが，両端点の重みともに 1 である．

図 4，図 5 の例では，各中間ノットの多重度が 1 つ減ったので，同次座標空間における曲線の連続性が C^0 連続から C^1 連続に改善された．

次に再パラメータ化方法の応用例として，区分有理 Bézier 曲線をスキニングしてビデオカメラの外装を表す曲面を生成した例を示す．**図 6** は，6 本の区分有理 Bézier 曲線を表す．それぞれの区分曲線は直線，円弧，Bézier 曲線セグメントから構成されている．また，それぞれの曲線は 3 次元空間において C^1 連続であるが，同次座標空間において C^0 連続である．**図 7** は生成されたスキニング曲面の等高線を示す．等高線表示から曲面内部の連続性を検証しにくいので，**図 8** では，生成されたスキニング曲面を構成するパッチどうしの共有境界の法線ベクトルのうち，法線ベクトルのなす角度が 0.5° 以上のものを示す．法線ベクトルのなす角度の最大値は 4.0° である．共有境界の法線ベクトルが一致しないので，共有境界におけるパッチどうしの連続性は C^0 連続である．

図 6 の曲線は 3 次元空間および同次座標空間の連続性がともに C^1 連続になるように再パラメータ化できる．**図 9** は再パラメータ化された曲線に基づいて生成したスキニング曲面の制御点を示す．**図 10** は生成したスキニング曲面の等高線を示す．生成したスキニング曲面は C^1 連続性を持つ．**図 11** は，図 9 の曲面を含んだビデオカメラの部品のシェーディング表示である．

6. ま と め

区分有理 Bézier 曲線を表現する有理 B-spline 曲線の C^1 再パラメータ化について述べた．この方法は区分有理 Bézier 曲線を有理 B-spline 曲線で表現する場合の同次座標空間での連続性を C^0 連続から C^1 連続に改善するものである．区分有理 Bézier 曲線は複数の

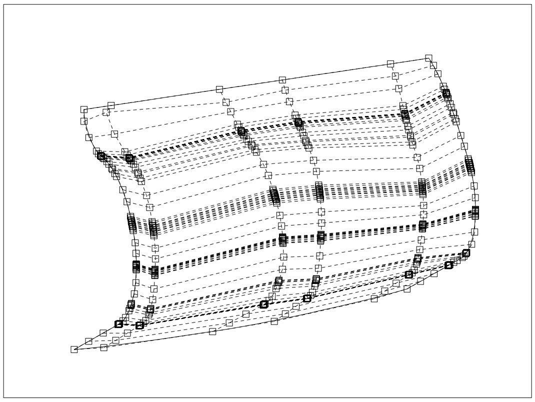

図 9 スキニング曲面の制御点表示
Fig. 9 Control points of skinned surface.

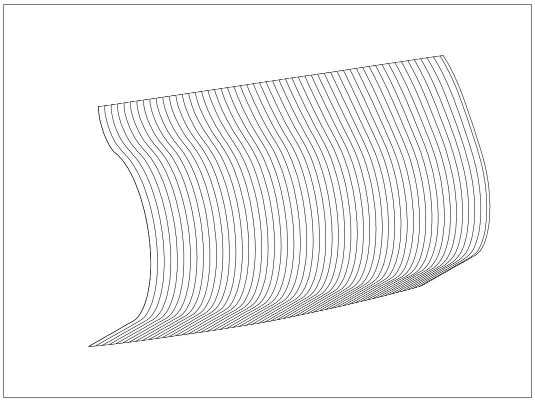

図 10 スキニング曲面の等高線表示（その 2）
Fig. 10 Contour lines of skinned surface (second).

直線，円弧（または有理 Bézier 曲線），および Bézier 曲線セグメントから構成される．曲線の形状と次数を変更しないで，区分有理 Bézier 曲線を有理 B-spline 曲線で表現する場合の各中間ノットの多重度を (次数 −1) 個に変更できる．また，再パラメータ化を行った結果より，有理 B-spline 曲線の両端点の重みは 1 である．なお，Tiller の C^2 連続の条件式[8]に従って方程式を立てると，方程式の数が未知数の数より多いため，本手法は有理 B-spline 曲線の C^2 再パラメータ化への拡張は困難である．

参 考 文 献

1) Chou, J.J.: Higher order Bézier circles, *Computer Aided Design*, Vol.27, No.4, pp.303–309 (1995).
2) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, Academic Press (1996).
3) Filip, D. and Ball, T.: Procedurally representing lofted surfaces, *IEEE Comput. Graph. and Appl.*, Vol.9, No.6, pp.27–33 (1989).

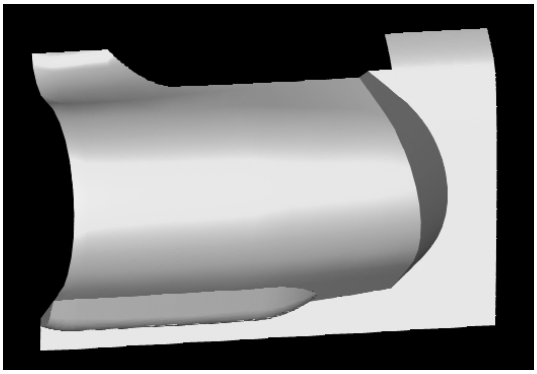

図 11 ビデオカメラの部品のシェーディング表示
Fig. 11 Shading of viedo camera part.

4) Hohmeyer, M. and Barsky, B.: Skinning rational B-spline curves to construct an interpolatory surface, *Comput. Vis. Graph. and Image Processing: Graphical Models and Image Processing*, Vol.53, No.6, pp.511–521 (1991).
5) Patterson, R.: Projective transformations of the parameter of a rational Bernstein-Bézier curve, *ACM Trans. Graphics*, Vol.4, No.4, pp.276–290 (1986).
6) Piegl, L. and Tiller, W.: A menagerie of rational B-spline circles, *IEEE Comput. Graph. and Appl.*, Vol.9, No.5, pp.48–56 (1989).
7) Piegl, L. and Tiller, W.: *The NURBS Book*, Springer-Verlag (1995).
8) Tiller, W.: Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces, *Computer Aided Design*, Vol.24, No.8, pp.445–453 (1992).
9) 鳥谷浩志，千代倉弘明：3 次元 CAD の基礎と応用，共立出版 (1991).

(平成 11 年 2 月 3 日受付)
(平成 12 年 7 月 5 日採録)

徳山　喜政

昭和 31 年生．昭和 53 年台湾大学工学部機械工学科卒業．昭和 61 年東京大学工学部産業機械工学科修士課程修了．（株）リコー 画像システム事業本部ソフトウエア研究所に勤務．ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事．CAD，CG における自由曲線・曲面の生成手法，形状制御手法等に興味を持つ．

今野　晃市（正会員）

昭和 37 年生．昭和 60 年筑波大学第三学群情報学類卒業．（株）リコー 画像システム事業本部ソフトウエア研究所に勤務．ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事．平成 12 年ラティス・テクノロジー（株）に勤務．3 次元とインターネットの統合環境に関する研究，開発に従事．レンダリングアルゴリズム，データ圧縮，自由曲面の生成手法，曲線・曲面の形状制御，並列処理等に興味を持つ．博士（工学）．