加法形一対比較行列を用いた多目的意思決定

平 良 直 之† 宮 城 隼 夫†† 山 下 勝 己†††

AHP は (a) 人間の好みやイメージなどの指標に対しても一対比較による評価で主観的判断を数値で割り付けることができる，(b) 手続きが簡単で初心者にも分かりやすいなどの特長を有しており，多目的意思決定問題における有効な手法といえる．しかしながら，AHP には理論的厳密さから見るといくつかの不備もあり，その 1 つとして，数値的整合性と言語的整合性の不調和が指摘されている．この指摘は，意思決定者から得られる言語的尺度を比尺度で定義するために，言語間の整合関係を乗法演算として扱うことに起因する．本論文では，この指摘に対処できる 1 つの手法について提案し，その有効性について述べている．本手法の特長は，(1) 言語的尺度を距離尺度で定義し言語間の整合関係を加法演算として扱う，(2) 言語的表現を対応させる一対比較行列と評価項目の重みベクトルを算出する行列とを分けて考え両者を同形写像にて対応させるという点にある．言語的尺度を距離尺度で定義した一対比較行列は歪み行列となるため，その固有ベクトルを評価項目の重みベクトルとして扱うことができない．(2) はこのことを考慮したものである．

Multiple-criteria Decision-making Using Additive-type Pairwise Comparison Matrix

Naoyuki Taira,† Hayao Miyagi†† and Katsumi Yamashita†††

The AHP (Analytic Hierarchy Process) developed by Saaty has received much attention, as a useful evaluation technique in the multiple-criteria decision making. Two main advantages are, (a) it can grade human's sense of values, and (b) the procedure is simple. From the theoretical standpoint, however, a few weak points are noted. A main point among them is disharmony between numerical consistency and linguistic consistency. This indication is due to defining the linguistic measure as the ratio measure. This paper presents a method of relieving the indication. To cope with the indication, the proposed method defines the linguistic measure as the distance measure, and utilizes the isomorphism between pairwise comparison matrix corresponding to linguistic measure and matrix leading to weight vector.

1. はじめに

多目的意思決定問題では，人間特有の曖昧な価値基準をもシステムの目的としてとらえ，いくつかの代替案の中から目的に合致したものを選ぶ．人間の主観的判断による評価を定量化する有効な手法として，Saaty が提案した AHP（Analytic Hierarchy Process）[1) がある．AHP は評価項目の相対的な重みを一連の一対比較データから求める手法であり，手続きが簡単で分かりやすいため，現在までに多くの研究がなされている[2)~9)．

AHP の理論的特長は，Perron-Frobenius の定理[10) をうまく活用し，一対比較行列の固有ベクトルを評価項目の重みベクトルとして扱うことにある．ここでは，一対比較行列の要素を評価項目の重みの比として定めるため，人間が思考する言語的尺度を比尺度として扱うことになる．しかしながら，AHP を用いて意思決定を支援した場合，言語的尺度を割り当てた数値間の整合関係と我々が日常で考える言語間の整合関係との調和がとりにくいという指摘がなされている[7)．この指摘は，AHP においては言語的尺度を比尺度で定めるために，言語間の整合関係を乗法演算として扱うことに起因する．

本論文で提案する意思決定手法の特長は以下の 2 点にある．

† 琉球大学大学院理工学研究科
Graduate School of Science and Enginnering, University of the Ryukyus
†† 琉球大学工学部情報工学科
Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, University of the Ryukyus
††† 大阪府立大学工学部電気電子システム工学科
Department of Electric and Electoronic System Enginerring, Faculty of Engineering, Osaka Prefecture University

(1) 意思決定者が与える言語的尺度を距離尺度で定義する．
(2) 言語的表現に対応した一対比較行列と固有ベクトルを算出する行列を分けて考える．

言語的尺度を距離尺度で定義した場合，言語間の整合関係を加法演算で扱うことになる．これは前述のAHPの指摘に対処することを試みたものである．しかしながら，(1)のように定めた一対比較行列は歪み行列となり，その固有ベクトルを評価項目の重みベクトルとして扱うことはできない．そこで本手法においては，(2)であげたように，言語的表現に対応した一対比較行列と固有ベクトルを算出する行列とを分けて考え，両者間を“同形”という観点から対応させることで評価項目の重みベクトルを算出する．これにより，人間の感覚量からみた整合性と数値上の整合性がうまく調和した一対比較行列を用いることができ，かつ，AHPの特長を利用することができる．

以下，2章ではAHPの理論を簡単に述べるとともに，AHPに対する指摘について述べる．3章では加法形一対比較行列を用いた重みの算出法について提案する．4章では，シミュレーションとして，“旅行先の決定問題”と“自家用車の購入問題”に関する意思決定問題を取り上げ，本手法による評価とAHPによる評価を比較し本手法の有効性を確認する．

2. AHPの理論と問題点

2.1 AHPの理論

n個の評価項目 $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$ があり，その本来の重みが $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \cdots, \mathrm{w}_\mathrm{n}$ であるとき，意思決定者が与える項目 X_i，X_j 間の一対比較値を

$$\mathrm{a}_\mathrm{ij} = \mathrm{w}_\mathrm{i}/\mathrm{w}_\mathrm{j}, \quad (1)$$

として定める．このように定めた場合，一対比較行列 A は

$$A = [\mathrm{a}_\mathrm{ij}] = \begin{bmatrix} \mathrm{w}_1/\mathrm{w}_1 & \mathrm{w}_1/\mathrm{w}_2 & \cdots & \mathrm{w}_1/\mathrm{w}_\mathrm{n} \\ \mathrm{w}_2/\mathrm{w}_1 & \mathrm{w}_2/\mathrm{w}_2 & \cdots & \mathrm{w}_2/\mathrm{w}_\mathrm{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{w}_\mathrm{n}/\mathrm{w}_1 & \mathrm{w}_\mathrm{n}/\mathrm{w}_2 & \cdots & \mathrm{w}_\mathrm{n}/\mathrm{w}_\mathrm{n} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

という形になる．また，A の各成分は正であるので，Perron-Frobeniusの定理より A は正の固有値を持ち，最大固有値 $\lambda_{\max}$ に対する固有ベクトルは各成分とも正になることが分かる．一方，式(2)のすべての列ベクトルは重みベクトル $w = [\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \cdots, \mathrm{w}_\mathrm{n}]^\mathrm{T}$ の定数倍であるので，A のランクは1である．したがって，A の固有値の中で0でないものは1つだけであり，これが $\lambda_{\max}$ になる．さらに，以下の2式の関係より

表1 言語的表現に対応した値
Table 1 Values of linguistic variables.

同じ位重要	→	1
少し重要	→	3
かなり重要	→	5
非常に重要	→	7
圧倒的に重要	→	9

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\mathrm{n} = \mathrm{trace}A, \quad (3)$$

$$\mathrm{trace}A = \mathrm{n}, \quad (4)$$

最大固有値 $\lambda_{\max}$ はnとなる．また，式(2)の右側から重みベクトル w を乗じると

$$A \cdot w = \mathrm{n}w, \quad (5)$$

という関係が成立するので，最大固有値 $\lambda_{\max}$ に対する固有ベクトルは重みベクトル w と一致する．また，式(1)のように一対比較値を定めた場合，A の要素間の整合関係は

$$\mathrm{a}_\mathrm{ij} \cdot \mathrm{a}_\mathrm{jk} = \mathrm{a}_\mathrm{ik}, \quad (6)$$

となる．なお，本論文では要素間の整合関係が式(6)となる一対比較行列を乗法形一対比較行列と呼ぶことにする．以上のことを利用して，AHPでは意思決定者の主観的データから次のようにして評価項目の重みを算出する．

まず，第1段階として，意思決定者に対して一対比較形式の質問を行い，得られた回答を**表1**の数値あるいはその逆数で割り当て，一対比較行列 A' を作成する．次に，第2段階として，一対比較行列 A' の整合性をチェックし，その整合性が満たされるまで一対比較行列を作成し直す．最後に，第3段階として，一対比較行列 A' の最大固有値に対する固有ベクトルを評価項目の重みベクトルとして採用する．

2.2 AHPに対する指摘

AHPでは前節の手順に従って評価項目の重みを算出するが，理論的厳密さからみると，言語的な整合関係と数値的な整合関係とでは調和がとれていないという指摘がなされている[7]．この指摘内容は，AHPでは，要素間の整合関係を式(6)で与えているため，言語間の合成演算を乗法的に考えていることになるが，人間が普通に行う言語間の合成は乗法的であるとはいいにくいというものである．たとえば，“項目 X_1 は項目 X_2 より少し重要 $(\mathrm{a}_{12} = 3)$”，“項目 X_2 は項目 X_3 より少し重要 $(\mathrm{a}_{23} = 3)$” という回答を得たとする．このとき，項目 X_1 と項目 X_3 の比較に式(6)を適用すると，

$$\mathrm{a}_{13} = \mathrm{a}_{12} \cdot \mathrm{a}_{23} = 3 \cdot 3 = 9, \quad (7)$$

となり，意思決定者が“圧倒的に重要”に対応する9

という数値を a_{13} を割り付けた場合のみ式 (6) の整合関係を満たすことになる．すなわち，上記の例は

$$\text{少し重要} \circ \text{少し重要} = \text{圧倒的に重要}, \tag{8}$$

となる関係を導くことになるが，これは我々の現実的感覚と相容れない．なお，$\circ$ は言語間の合成を表す演算である．このように，AHP では要素間の整合関係を式 (6) で与えているために，数値的な整合関係と言語的な整合関係との間で不調和が生じている．

3. 加法形一対比較行列を用いた重みの算出

2.2 節で述べた AHP に対する指摘は，式 (6) のように扱う数値間の整合関係が，人間が行う言語間の整合関係に必ずしも一致するとは限らないことを意味する．すなわち，この指摘は意思決定者が与える一対比較値を式 (1) のように比尺度で定めたことに起因する．

3.1 加法形一対比較行列の作成

本論文では意思決定者が与える一対比較値を距離尺度で定め，次式で定義する．

$$\rho_{\mathrm{ij}} = \mathrm{w_i} - \mathrm{w_j}. \tag{9}$$

このように定めた場合，一対比較行列 P は以下のようになる．

$$P = [\rho_{\mathrm{ij}}] = \begin{bmatrix} \mathrm{w_1 - w_1} & \mathrm{w_1 - w_2} & \cdots & \mathrm{w_1 - w_n} \\ \mathrm{w_2 - w_1} & \mathrm{w_2 - w_2} & \cdots & \mathrm{w_2 - w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{w_n - w_1} & \mathrm{w_n - w_2} & \cdots & \mathrm{w_n - w_n} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

ただし，上式は次の性質を持つ．

$$\rho_{\mathrm{ii}} = 0,\ \rho_{\mathrm{ij}} = -\rho_{\mathrm{ji}}, \quad \forall \mathrm{i,j} = 1,2,\cdots,\mathrm{n}. \tag{11}$$

また，式 (9) から要素間の整合関係は

$$\rho_{\mathrm{ij}} + \rho_{\mathrm{jk}} = \rho_{\mathrm{ik}}, \tag{12}$$

となる．本論文では，整合関係が上式で与えられる一対比較行列を加法形一対比較行列と呼ぶことにする．

本手法では，加法形一対比較行列を作成する際には，意思決定者に一対比較形式の質問を行い，その回答に**表 2** の数値あるいはその負の数値を割り付ける．

次に，2.2 節で述べた回答例 “項目 $\mathrm{X_1}$ は項目 $\mathrm{X_2}$ より少し重要”，“項目 $\mathrm{X_2}$ は項目 $\mathrm{X_3}$ より少し重要” を本手法に適用する．このとき，ρ_{12} と ρ_{23} には 2 が割り当てられ，ρ_{13} については式 (12) より

$$\rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23} = 2 + 2 = 4, \tag{13}$$

となり，ρ_{13} に 4 が割り当てられれば整合関係を満足することになる．4 という数値は “かなり重要” という言語的表現に対応するので，このことより

$$\text{少し重要} \circ \text{少し重要} = \text{かなり重要}, \tag{14}$$

表 2 言語的表現に対応した値
Table 2 Values of linguistic variables.

同じ位重要	→	0
少し重要	→	2
かなり重要	→	4
非常に重要	→	6
圧倒的に重要	→	8

という関係が導かれる．上式の関係と式 (8)

$$\text{少し重要} \circ \text{少し重要} = \text{圧倒的に重要},$$

の関係を比較すると，式 (8) より式 (14) の関係の方が我々の現実的感覚に近い．なお，この比較は文献 7) で取り上げられた例と同様のものであり，この文献においても式 (8) より式 (14) の関係の方が現実的感覚に近いとことを指摘している．さらに，琉球大学の学生 20 人に対してアンケートを行い，これらの 2 つの関係のうちどちらの関係の方がより現実的感覚に近いかを回答してもらった．その結果，9 割の学生から式 (8) より式 (14) の方が現実的感覚に近いという回答を得た．

以上の議論から，人間が行う言語間の合成演算 $\circ$ は乗法演算というよりむしろ加法演算に近いものであり，人間が与える 2 項目間の一対比較値は比尺度ではなく距離尺度で定義したほうがよいと思われる．

3.2 加法形一対比較行列を用いた重みの算出

AHP の最大の特長は，一対比較行列の固有ベクトルを評価項目の重みベクトルとして扱うことである．しがしながら，式 (10) のように一対比較行列を定めると，この行列は歪み対称行列となり，その固有値は純虚数となる[10]．したがって，加法形一対比較行列の固有ベクトルを重みベクトルとして扱うことはできない．そこで，本論文では言語的表現に対応した一対比較行列と固有ベクトルを算出する行列とを分けて考え，両行列間を “同形” という観点から対応させる方法をとる．

3.2.1 同 形 写 像

乗法演算が定義されている代数系 $(\mathrm{A_S}; \cdot)$ の各要素 $\mathrm{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}}$ と一対一に対応するパラメータ $\rho_{11}, \rho_{12}, \cdots, \rho_{\mathrm{nn}}$ を考える．次に，ρ を要素とし加法演算が定義されている代数系 $(\mathrm{P_S}; +)$ を定義する．ここで，$\mathrm{P_S}$ を言語的尺度からなる要素を持つ集合とし，**図 1** に示すような同形写像[11] $\mathrm{f : P_S \to A_S}$ を考える．

f が同形写像であるためには，次の 2 つの条件が成立しなければならない．

(I) f は全単射．
(II) $\mathrm{f}(\rho_{\mathrm{ij}} + \rho_{\mathrm{jk}}) = \mathrm{f}(\rho_{\mathrm{ij}}) \cdot \mathrm{f}(\rho_{\mathrm{jk}})$．

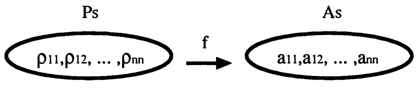

図 1 同形写像
Fig. 1 Isomorphism.

(I) の条件は仮定より明らかに成立する．(II) が成立するためには，f として指数法則の成立する関数を選べばよい．指数法則の成立する関数には $2^{\rho}, 3^{\rho}, \cdots$ といろいろ考えられるが，本論分では e^{ρ} を採用し次式で同形写像を定義する．

$$\mathrm{a_{ij}} = \mathrm{f}(\rho_{\mathrm{ij}}) = \mathrm{e}^{\rho_{\mathrm{ij}}}. \tag{15}$$

3.2.2 重みベクトルの算出

本論文で提案する加法形一対比較行列を用いた重みベクトルの算出アルゴリズムを**表 3** に示す．

Step3 において，式 (15) を用いて式 (10) を同形写像すると

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\rho_{11}} & \mathrm{e}^{\rho_{12}} & \cdots & \mathrm{e}^{\rho_{1n}} \\ \mathrm{e}^{\rho_{21}} & \mathrm{e}^{\rho_{22}} & \cdots & \mathrm{e}^{\rho_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\rho_{n1}} & \mathrm{e}^{\rho_{n2}} & \cdots & \mathrm{e}^{\rho_{nn}} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

となる．上式は既約な正行列であるので，Perron-Frobenius の定理より，行列 A は正の固有値を持ち，最大固有値 $\lambda_{\max}$ に対する固有ベクトルは各成分とも正になることが分かる．また，式 (9) を考慮し，

$$v = [\mathrm{e}^{\mathrm{w}_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{w}_2}, \cdots, \ \mathrm{e}^{\mathrm{w}_n}]^T, \tag{17}$$

上式を用いて式 (16) を変形すると

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{w}_1}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{w}_1}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{w}_1}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_n} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{w}_2}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{w}_2}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{w}_2}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{w}_n}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{w}_n}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{w}_n}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_n} \end{bmatrix}$$
$$= \left[\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{w}_1}}v, \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{w}_2}}v, \cdots, \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{w}_n}}v\right], \tag{18}$$

となる．式 (18) より，A のランクは明らかに 1 である．したがって，A の固有値の中で 0 でないものはただ 1 つだけであり，これが $\lambda_{\max}$ である．一方，以下の 2 式の関係より

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{\mathrm{n}} = \mathrm{trace}A, \tag{19}$$

$$\mathrm{trace}A = \mathrm{n}, \tag{20}$$

$\lambda_{\max}$ の値は n となることが分かる．また，式 (18) の右側から，式 (17) を乗じると

表 3 加法形一対比較行列を用いた重みベクトルの算出アルゴリズム
Table 3 Algorith of calculating weight vector using additive-type pairwise comparison matrix.

Step1	意思決定者に対して一対比較形式の質問を行い，その回答を表 2 に基づいた数値で割り当て，加法形一対比較行列を作成する．
Step2	加法形一対比較行列に対して同形写像を行った行列を作成する．
Step3	Step2 で作成した行列の固有ベクトルを求める．
Step4	固有ベクトルの各成分に対して，逆変換を行い評価項目の重みベクトルを算出する．

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{w}_1}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_1} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{w}_1}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_n} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{w}_2}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_1} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{w}_2}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{w}_n}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_1} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{w}_n}/\mathrm{e}^{\mathrm{w}_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{w}_1} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{w}_2} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{w}_n} \end{bmatrix}$$
$$= \mathrm{n}v, \tag{21}$$

という関係が成立する．上式より，式 (17) が式 (16) の最大固有値に対する固有ベクトルであることが分かる．そこで，Step4 では，重みベクトル $w = [\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \cdots, \mathrm{w}_n]^{\mathrm{T}}$ を算出するために，Step3 で求めた固有ベクトルの各成分に対して逆変換を行う．

以上，式 (17) が，加法形一対比較行列を同形写像して得られた行列の固有ベクトルであることは述べた．しかしながら，表 3 中の Step3 で算出される固有ベクトルが必ずしも式 (17) と一致するとは限らない．すなわち，Step3 では式 (17) に対してスカラー倍の自由度を持つ，次式のベクトルが算出される．

$$v' = [\mathrm{ke}^{\mathrm{w}_1}, \mathrm{ke}^{\mathrm{w}_2}, \cdots, \mathrm{ke}^{\mathrm{w}_n}]^{\mathrm{T}}, \ \mathrm{k}: 定数. \tag{22}$$

したがって，Step4 では，

$$w' = [\mathrm{w}_1 + \mathrm{logk}, \mathrm{w}_2 + \mathrm{logk}, \cdots, \mathrm{w}_n + \mathrm{logk}]^{\mathrm{T}}, \tag{23}$$

となるベクトルが得られ，このベクトルは重みベクトルの各要素に一定の数値を加えたベクトルとなっている．しかしながら，重みベクトルに対して，以下の定理が成り立つ．なお，定理の証明については付録に示す．

定理 1（重みベクトルと代替案の最終評価） 評価項目の重みベクトルにある一定の数値が加えられている場合，その各要素の値が正ならば，最終的に算出する代替案の評価順位に影響を及ぼさない．

本手法では，最終目的に対する代替案の評価順位を算出することを目的とする．上記の定理より，Step4 にて算出した重みベクトルの要素に負の数が含まれる場合，各要素の値が正になるよう一定の数を加算すれ

ばよい．ここで，どのような数値を加えるかについての議論が必要になるが，筆者らは重みベクトルの最小要素の値が 1 となるような数値を加えることが適切であろうと考える．これは，まず，第 1 に意思決定者の回答を割り当てる数値が -8 から 8 までの整数でありその中で最小の正数が 1 であること，第 2 に最小値が 1 となるベクトルを重みベクトルとして採用した場合，最終的に算出する代替案の評価の最小値が 1 以上となること，を考慮したものである．

4. シミュレーション

本章では，提案手法の有効性を検証するために，“旅行先の決定問題” と “自家用車の購入問題” を例としてあげ，被験者にこれらの問題に回答してもらった．提案手法と AHP の違いは，本手法が言語間の整合関係を加法的にとらえて重みを算出するのに対し，AHP では言語間の整合関係を乗法的にとらえて重みを算出する点にある．本シミュレーションでは，被験者がイメージする言語間の整合関係を加法的にとらえた方が良いか，あるいは乗法的にとらえた方が良いかを検証する．ここでは，被験者から

- 本手法および AHP による重み算出過程で必要となる一対比較データ
- 実際にイメージする代替案の評価

を収集し，本手法により算出した重みを用いた評価と AHP により算出した重みを用いた評価を行う．得られた評価と被験者がイメージする評価を比較することで，本手法の有効性を検証する．

4.1 意思決定問題の概要

本シミュレーションでは，本手法による評価と AHP による評価を比較検討するために必要となるデータをアンケートにより回収した．

4.1.1 旅行先の決定問題

“旅行先の決定問題” に関して評価基準および代替案を以下のように設定した．

評価基準…旅費，プラン，目的地，便利さ
代替案…北海道，香港，アメリカ西海岸，イタリア

上記の評価基準において “プラン” とはパックツアーのスケジュールプラン，“目的地” とは旅行先に対する興味，“便利さ” とは旅行先でのコミニュケーションのとりやすさを意味する．

4.1.2 自家用車の購入問題

“自家用車の問題” に関して評価基準および代替案を以下のように設定した．

評価基準…外観，燃費，予算，性能，内装
代替案…トヨタスターレット，ホンダシビック，ユーノスロード スター

表 4　AHP により算出した各重み
Table 4　Weights useing AHP.

各評価基準の重み

	旅費	目的地	プラン	便利さ	重み
旅費	1	1/5	1	1	0.349
目的地	5	1	1	3	1.000
プラン	1	1	1	3	0.671
便利さ	1	1/3	1/3	1	0.278

旅費に対する各代替案の重み

	北海道	香港	アメリカ	イタリア	重み
北海道	1	1/5	1/3	1/3	0.156
香港	5	1	1/5	1/5	0.294
アメリカ	3	5	1	3	1.000
イタリア	3	5	1/3	1	0.607

目的地に対する各代替案の重み

	北海道	香港	アメリカ	イタリア	重み
北海道	1	1/5	1/7	1/7	0.064
香港	5	1	1/7	1/5	0.154
アメリカ	7	7	1	5	1.000
イタリア	7	5	1/5	1	0.402

プランに対する各代替案の重み

	北海道	香港	アメリカ	イタリア	重み
北海道	1	3	1/5	1/5	0.236
香港	1/3	1	1/3	1	0.212
アメリカ	5	3	1	5	1.000
イタリア	5	1	1/5	1	0.411

便利さに対する各代替案の重み

	北海道	香港	アメリカ	イタリア	重み
北海道	1	5	3	5	1.000
香港	1/5	1	1/5	1	0.147
アメリカ	1/3	5	1	5	0.571
イタリア	1/5	1	1/5	1	0.147

4.2 数　値　例

本節では，ある被験者の “旅行先の決定問題” に対するアンケート回答を基に，AHP による評価と本手法による評価を行う．**表 4** に，被験者から得た回答を基に作成した乗法形一対比較行列および AHP により算出した重みを示す．また，**表 5** に，被験者からの回答を基に作成した加法形一対比較行列および本手法により算出した重みを示す．ただし，表記を統一するために，表 4 および表 5 における重みベクトルは最大値が 1 となるよう正規化した．

次に，表 4 および表 5 で示した各重みを基に行った，AHP による評価と本手法による評価を**表 6** に示す．

一方，被験者がイメージする代替案の優先順位は，ア

表 5 本手法により算出した各重み
Table 5 Weights useing proposed technique.

各評価基準の重み

	旅費	目的地	プラン	便利さ	重み
旅費	0	−4	0	0	0.352
目的地	4	0	0	2	1.000
プラン	0	0	0	2	0.697
便利さ	0	−2	−2	0	0.251

旅費に対する各代替案の重み

	北海道	香港	アメリカ	イタリア	重み
北海道	0	−4	−2	−2	0.204
香港	4	0	−4	−4	0.548
アメリカ	2	4	0	2	1.000
イタリア	2	4	−2	0	0.894

目的地に対する各代替案の重み

	北海道	香港	アメリカ	イタリア	重み
北海道	0	−4	−6	−6	0.114
香港	4	0	−6	−4	0.382
アメリカ	6	6	0	4	1.000
イタリア	6	4	−4	0	0.701

プランに対する各代替案の重み

	北海道	香港	アメリカ	イタリア	重み
北海道	0	2	−4	−4	0.211
香港	−2	0	−2	0	0.250
アメリカ	4	2	0	4	1.000
イタリア	4	0	−4	0	0.591

便利さに対する各代替案の重み

	北海道	香港	アメリカ	イタリア	重み
北海道	0	4	2	4	1.000
香港	−4	0	−4	0	0.177
アメリカ	−2	4	0	4	0.810
イタリア	−4	0	−4	0	0.177

表 6 AHP および本手法による各代替案の評価
Table 6 Evaluations of various alternatives using AHP and proposed technique.

	北海道	香港	アメリカ	イタリア
AHP	0.555	0.440	2.179	0.931
本手法	0.584	0.794	2.252	1.472

ンケートの回答によると，**表 7** のようなものであった．

表 6 と表 7 を比較すると，AHP による評価では，優先順位が 3 位と 4 位の代替案が被験者のイメージと逆転していることが分かる．

4.3 シミュレーション結果

琉球大学の学生 100 人のアンケート回答を基に本手法による評価と AHP による評価を行い，これらの評価順位と各学生（被験者）がイメージする代替案の順位を比較した．比較結果を**表 8** と**表 9** に示す．

表 8 と表 9 から，AHP による評価より本手法による評価が被験者のイメージに近い評価を行っていることが分かる．この結果から，人間がイメージする言語間の整合関係が加法演算に近いものであるといえ，本手法の有効性が確認できる．

表 7 被験者がイメージする各代替案の優先順位
Table 7 Priority order of the subject's image for various alternatives.

1 位	アメリカ西海岸
2 位	イタリア
3 位	香港
4 位	北海道

表 8 “旅行先の決定問題” に関する評価
Table 8 Evaluation for traveling problem.

	一位一致	全位一致
AHP による評価	66 % (66/100)	37 % (37/100)
本手法による評価	86 % (86/100)	43 % (43/100)

表 9 “自家用車の購入問題” に関する評価
Table 9 Evaluation for purchase problem.

	一位一致	全位一致
AHP による評価	65 % (65/100)	42 % (42/100)
本手法による評価	84 % (84/100)	52 % (52/100)

5. おわりに

AHP は，人間のイメージや好みなどの主観的評価を定量化できる有効な意思決定法として知られているが，その一方で，理論的厳密さからみると数値的な整合関係と言語的な整合関係の調和がとりにくいという指摘があった．

本論文では，基本的には AHP の立場をとりながら，上記の指摘に対処できる意思決定手法を提案した．本手法の特長は言語的尺度を距離尺度で定義した一対比較行列を用いることと，言語的表現に対応した一対比較行列と固有ベクトルを算出する行列とを同形写像を用いて結び付けることにある．また，シミュレーション結果から，人間がイメージする言語間の整合関係が加法演算に近いことを確認し，本手法の有効性を示した．

ここでは，一対比較データ間の整合性をチェックする指標については特に触れなかったが，AHP と本手法では一対比較行列の性質が異なるため，本手法におけるデータ間の整合性チェックに対する検討が今後の課題として残されている．

参 考 文 献

1) Saaty, T.L.: *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York (1980).
2) Arbel, A., Saaty, T.L. and Vargas, L.G.: Un-

clear Balance and The Parity Index: The Rule of Intangibles in Decisions, *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, No.5, pp.821–828 (1987).

3) Park, P.S., Tusji, K. and Suzuki, Y.: Comprehensive Evaluation of Urban Transportation Systems by AHP, *Int. J. of Systems Sci.*, Vol.18, No.6, pp.1179–1190 (1987).

4) 増田達也, 藤井勝彦：AHP におけるプライオリティの感度解析, 第 13 回システムシンポジウム予稿集, pp.197–202 (1987).

5) 増田達也：AHP における整合度および相対的重要度の感度係数, 電子情報通信学会論文誌（A）, No.11, pp.1562–1567 (1987).

6) 小沢知裕, 山口俊和, 福川忠昭：区間 AHP を用いる DEA の改良型領域限定法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌, Vol.38, No.9, pp.471–475 (1993).

7) 中山弘隆：多目的意思決定—理論と応用 I, システムと制御, Vol.30, No.7, pp.430–438 (1986).

8) Taira, N., Miyagi, H. and Yamashita, K.: Multiple-Criteria Decision Making Using Isomorphism, *Proc. IEEE International Conference on SMC*, Vancouver, Vol.32, No.3, pp.748–752 (1995).

9) Fan, Y., Yoshiya, K., Miyagi, H. and Taira, N.: Constructing Pairwise Comparison Matrix in Decision Making, *Proc. IEEE International Conference on SMC*, No.4, Beijing, pp.2511–2516 (1996).

10) 児玉慎二, 須田信英：システム制御のためのマトリックス理論, 計測自動制御学会 (1984).

11) 今井秀樹：情報数学, pp.27–30, 昭晃堂 (1991).

付　録

A.1 定理 1 の証明

ある最終目的に対して，s 個の評価基準より，m 個の代替案の中から最も目的に合致した代替案を選定する意思決定問題を考える．

このとき，s 個の評価基準の重みベクトル w_H を

$$w_H = [\mathrm{w_{h1}}, \mathrm{w_{h2}}, \cdots, \mathrm{w_{hs}}], \tag{24}$$

とし，i 番目の評価基準に対する代替案の重みベクトル $w_{hi,D}$ を

$$w_{hi,D} = [\mathrm{w_{hi,d1}}, \mathrm{w_{hi,d2}}, \cdots, \mathrm{w_{hi,dm}}], \tag{25}$$

とする．ただし，式 (24) の右辺の添字は各評価基準を，式 (25) の右辺の添字は i 番目の評価基準に対する各代替案を意味する．上記の 2 式より，j 番目の代替案の重みは以下の式で導出することができる．

$$\mathrm{w_{dj}} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{s}} [\mathrm{w_{hi,dj}} \cdot \mathrm{w_{hi}}]. \tag{26}$$

ここで，w_H，$w_{hi,D}$ に対して，ある一定の数値を加えた重みベクトル w'_H，$w'_{hi,D}$ を考えたとき，これらは式 (24)，式 (25) より

$$w'_H = [\mathrm{w_{h1}} + \alpha, \cdots, \mathrm{w_{hs}} + \alpha], \tag{27}$$

$$w'_{hi,D} = [\mathrm{w_{hi,d1}} + \beta_\mathrm{i}, \cdots, \mathrm{w_{hi,dm}} + \beta_\mathrm{i}], \tag{28}$$

と表せ，この 2 式を用いて算出した，j 番目の代替案の重みは

$$\mathrm{w'_{dj}} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{s}} [(\mathrm{w_{hi,dj}} + \beta_\mathrm{i}) \cdot (\mathrm{w_{hi}} + \alpha)], \tag{29}$$

となる．次に，式 (26) を考慮し，代替案 x，y における z 要素の差を考えると，その値は

$$(\mathrm{w_{hz,dx}} - \mathrm{w_{hz,dy}}) \cdot \mathrm{w_{hz}}, \tag{30}$$

となり，式 (29) についても同様の操作を行うと

$$(\mathrm{w_{hz,dx}} - \mathrm{w_{hz,dy}}) \cdot (\mathrm{w_{hz}} + \alpha), \tag{31}$$

となる．したがって，式 (27)，式 (28)

$$(\mathrm{w_{hz}} + \alpha) > 0, (\mathrm{w_{hz,dx}} + \beta_\mathrm{i}) > 0, \tag{32}$$

という条件を与えたとき，式 (30)，式 (31) の符号は一致する．以上のことから，w_H，$w_{hi,D}$ にある一定の数値を加えた重みベクトル w'_H，$w'_{hi,D}$ の各要素の値が正ならば，w_{dx} と w_{dy} の大小関係と $\mathrm{w'_{dx}}$ と $\mathrm{w'_{dy}}$ の大小関係は一致する．すなわち，評価項目の重みベクトルにある一定の数値を加えたとき，その各要素の値が正ならば代替案の評価順位に影響を及ぼさない．さらに，評価基準の階層が 1 階層ではなく複数階層が存在する場合についても考えてみる．最上位の評価基準からその 1 階層下の評価基準の重みベクトルを算出し，最終的には最下位の評価基準から代替案の重みベクトルを算出するという手順をとれば，前述の結論と同様の結果が導ける． ■

(平成 10 年 7 月 3 日受付)
(平成 12 年 7 月 5 日採録)

平良　直之（学生会員）

昭和 45 年生．平成 6 年琉球大学工学部電子情報工学科卒業．平成 8 年琉球大学大学院工学研究科電気・情報工学専攻修士課程修了．平成 11 年より同大学院理工学研究科博士後期課程に在学中．意思決定，ファジィ理論に関する研究に従事．日本オペレーションズリサーチ学会会員．

宮城　隼夫（正会員）

昭和 24 年生．昭和 52 年大阪府立大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了．同年琉球大学工学部助手．昭和 57 年同大学工学部助教授．昭和 62 年同大学工学部教授．現在に至る．ファジィ理論，意思決定，システムの安定性に関する研究に従事．工学博士．IEEE，計測自動制御学会，日本ファジィ学会，人工知能学会，電気情報通信学会各会員．

山下　勝己

昭和 27 年生．昭和 55 年大阪府立大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程単位取得修了．昭和 57 年琉球大学工学部助手．昭和 62 年同大学工学部助教授．平成 3 年同大学工学部教授．平成 12 年大阪府立大学工学部教授．現在に至る．適応制御，信号処理に関する研究に従事．工学博士．IEEE，計測自動制御学会，電気情報通信学会各会員．