一次元セル構造オートマトンのフラクタル次元とクラス分類*

香山喜彦[1], 田伏正佳[2], 西村治彦[3], 堀口 勉[4]
[1]梅花女子大学, [2]宮崎大学工学部, [3]兵庫教育大学, [4]神戸大学自然

3X−8

1．はじめに

1次元2状態のセル構造オートマトンについて，Wolfram[1]はその時間発展のルールを，現象論的に4つのクラスに分類した。このクラス分類に関して多くの研究がなされているが，シミュレーションないしは近似法によって求めた状態指数を用いるのが一般的である。これに対し，我々は，1次元セルが取り得る全ての状態（配位）の集合を定義し，その上でのルール関数の作用によって配位空間がその部分集合へ写像され，無限時間ステップ後の部分集合が，各ルールの特徴を表現していると考え，その極限集合についての複数の特性指数を定義し，それらを用いてクラス分類を試みた[2]。本稿では，その方法論と成果について報告する。

2．方法論と特性指数の定義

i番目のセルの状態を表す変数をx_iとし，状態値として，0または1の値を取るものとする。これにより，1次元Nセルの状態配位は$X=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$で指定される。可能な状態配位の全てを集めた集合を配位空間と呼び，$\{X\}_N$で表す。この空間の距離関数としてはHammingの距離

$$d(X,Y)=\sum_{i=1}^{N}|x_i-y_i| \tag{1}$$

をとり，任意の状態配位Xの重み(weight)を

$$w(X)=d(X,0)=\sum_{i=1}^{N}x_i \tag{2}$$

と書く。

各セルの次の時間ステップの状態を決定する関数を，そのセルオートマトンのルール関数と呼ぶ。この関数は，あるセルを中心とした左右各r個，合計$2r+1$個のセルの状態変数の関数であり，この$2r+1$をルールの近傍と呼ぶ。便宜上，以下では$r=1$，すなわち3近傍ルールのみに限定する。

セル状態の時間発展は，ルール関数をfとすれば

$$x_i^{(t+1)}=f(x_i^{(t)})=f(x_{i-1}^{(t)},x_i^{(t)},x_{i+1}^{(t)}) \tag{3}$$

で表現される。この関数を用いて，配位空間$\{X\}_N$からそれ自身への写像$f:\{X\}_N\to\{X\}_N$を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} f(X) &= f((x_1,x_2,\ldots,x_N)) \\ &= (f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_N)) \end{aligned} \tag{4}$$

但し，周期的境界条件を採用する。

時間発展をルール関数の合成により表現するために，最初の3近傍ルール関数を1次のルール関数と呼び，$f^{(1)}$と書けば，t次のルール関数は

$$\begin{aligned} f^{(t)}(x_i) &= f^{(1)}(f^{(1)}(\ldots f^{(1)}(x_i)\ldots)) \\ &= f^{(t)}(x_{i-t},\ldots,x_i,\ldots,x_{i+t}) \end{aligned} \tag{5}$$

で与えられ，$2t+1$近傍ルールとなる。$t-1$次とt次のルール関数の間の再帰的方程式は，$f_r^{(t)}=f_r^{(1)}(f_r^{(t-1)})$である。

ルールの特性指数の定義に移る。我々は，t次のルール関数による配位空間の像$f^{(t)}(\{X\}_N)$に，各ルールの特性が表れると考え，この集合上での指数の定義を行う。但し，各t時間での指数をルール関数と同様にt次の指数と呼び，特性指数は，$t\to\infty$での極限値で定義される。その際，特性指数がセルの総数N依存性を持たないようにするため，Nを定数とせず，$N=2t+1$でtとともに増加するとする。こうすることによって，多くの場合，各t次の指数の値からその極限を推測することが出来るようになる。

今，$2t+1$セルの配位空間上でのt次の写像$f^{(t)}$による像$f^{(t)}(\{X\}_{2t+1})$を考える。配位空間の要素$X^{(0)}$を初期配位とした各要素のweight

$$\begin{aligned} w(f^{(t)}(X^{(0)})) &= d(f^{(t)}(X^{(0)}),0) \\ &= \sum_{i=1}^{2rt+1} f^{(t)}(x_i^{(0)}) \end{aligned} \tag{6}$$

は，配位空間$\{X\}_{2t+1}$上で定義された0から$2t+1$の間の整数値を取る整数値関数である。配位空間の各要素はどれかの整数値に写像され，各整数値に対して，写された要素の数密度が次のように定義できる：

$$\rho^{(t)}(i)=\frac{n_i^{(t)}}{|\{X\}_{2t+1}|} \quad \text{for } i=0,\ldots,2t+1 \tag{7}$$

ここで，$n_i^{(t)}$は，整数値iに写像された$\{X\}_{2t+1}$の要素の数を表し，$|\{X\}_{2t+1}|$は，集合$\{X\}_{2t+1}$の要素の数，すなわち，この場合は2^{2t+1}である。この密度は，表現系$\{0,1,2,\ldots,2rt+1\}$上の確率測度と見ることが出来る。これを用いて，セル状態が1となるt次の確率$p^{(t)}$と，t次の容量次元$D_0^{(t)}$を

$$p^{(t)}=\frac{1}{2rt+1}\sum_{i=0}^{2rt+1} i\rho^{(t)}(i) \tag{8}$$

$$D_0^{(t)}=\frac{\log\sum_{i=0}^{2rt+1}\theta(\rho^{(t)}(i))^{**}}{\log(2rt+2)} \tag{9}$$

で定義し，それらの$t\to\infty$での極限値として，特性指数を定義する。ただし，3節で見るように，各時間ステップ毎に値が

** θは階段関数

$$\theta(x)=\begin{cases} 0, & \text{for } x=0 \\ 1, & \text{for } x>0 \end{cases}$$

* Fractal Dimensions and Classificaion of One-dimensional Cellular Automata

Yoshihiko KAYAMA[1], Masayoshi TABUSE[2], Haruhiko NISHIMURA[3], Tsutomu HORIGUCHI[4]
[1]BAIKA Women's College, [2]Miyazaki University, [3]Hyogo University of Teacher Education, [4]Kobe University

振動し，数学的な意味での極限値が存在しない場合もある。

次に，初期配位の変分が，時間ステップを追う毎にどのように変化していくかを見るための指数を定義する。写像ϕ : $\{X\}_{2t+1} \to \{X\}_{2t+1}$による初期状態の変化は Hamming の距離によって

$$dX^{(0)} = d(\phi(X^{(0)}), X^{(0)}) \tag{10}$$

で与えられる。t 時での変分は，t 次のルール関数を用いて

$$dX^{(t)} = d(f^{(t)}(\phi(X^{(0)})), f^{(t)}(X^{(0)})) \tag{11}$$

となることがわかる。これも，$\{X\}_{2t+1}$上の整数値関数であるから，上の場合と同様に，確率測度$\rho_\phi^{(t)}(i)$が定義できて，これを用いて，特性指数としての変分変化率 D_{iff}を

$$D_{iff}(\phi) = \lim_{t\to\infty} \sup D_{iff}^{(t)}(\phi) \tag{12}$$

$$D_{iff}^{(t)}(\phi) = \frac{\log \sum_{i=0}^{2t+1} i\rho_\phi^{(t)}(i)}{\log(2rt+2)} \tag{13}$$

で定義する。ここで，上極限を取ったのは，ルールによっては，振動する値を持つものがあり，変分の拡がり度としては，これが適当と考えたからである。

以上で，必要な特性指数の定義は終了した。次の節では，これらを，実際の２状態３近傍ルールに対して適用する。

３．２状態３近傍ルール

各指数の値を求める方法としては，３通りの方法を用いた。先ずは，各ルールの再帰的方程式の一般解を求める方法である。ルール関数の方程式が解けない場合でも，セル状態の確率$p^{(t)}$や，変分変化率 $D_{iff}^{(t)}$については，次のような一般解を持つものが多くあることがわかる。

$$\sum_{i=1}^{4} \left\{ a_i^+ + (-1)^t a_i^- \right\} \left(\frac{i}{4}\right)^t \tag{14}$$

このとき，$t \to \infty$ での特性指数は $a_4^+ + a_4^-$ および $a_4^+ - a_4^-$ で与えられる。表１において，＊印のついた値は，この意味での確定値が得られたことを示している。

上記のような一般解が求められない場合は，コンピュータにより再帰的方程式から t 次の指数を逐次に求める方法を用いた。現在我々の手元にあるコンピュータの能力では，$t = 11$，23 セルまでの計算が限界であった。

もう１つはシミュレーションである。これは，上記の逐次計算のステップ数が少ないことを補い，収束が遅いルールに対して有効な値を得ることと，我々の計算の妥当性チェックのために行った。セルの総数 201，初期配位数 550 で，時間ステップ 100 において各指数の値を求めた。ただ，初期配位のセル状態確率については，定値を取ると容量次元の妥当な値を求められないので，ランダムサンプリングの方法を用いた。

以上の方法による計算結果の一部を表１に示す。それからわかるように，クラス分類で最も有効な特性指数は D_{iff}である。この値によって，Class I，II，III は区別することが出来る。各特性指数の値によるクラス分類と，Wolfram による現象論的なクラス分類とは，いくつかのルールを除いて一致している。また，一様な状態に移行する Class I ルールにおいて，容量次元が０のものとそうでないものがある。これは，初期配位のほとんどは，一様な状態 (全てのセルが１かまたは０) に移行するが，そうでないものも存在し，$D_{iff} \to -\infty$ からもわかるように，それらは，不安定なアトラクタになっていると考えられる。

rule #	p	D_0	D_{iff}	C	*C
0	*0	*0	-∞	1	1
1	*1/8,3/4	−1(0.966)	*0	2	2
2	*1/8	−1(0.680)	*0	2	2
3	*1/4,5/8	−1(0.970)	*0	2	2
4	*1/8	−1(0.700)	*0	2	2
5	*1/4,5/8	−1(0.970)	*0	2	2
6	0.234(0.140)	−1(0.778)	0.292(0.094)	2	2
7	*9/16,3/8	*1	*0	2	2
8	*0	*0	-∞	1	1
9	0.409(0.419)	−1(0.862)	0.469(0.413)	2,3	2
11	0.467(0.523)	−1(0.951)	0.282(0.159)	2	2
12	*1/4	−1(0.75)	*0	2	2
13	*7/16	−1(0.574)	*0	2	2
14	0.458(0.308)	−1(0.748)	0.419(0.313)	2,3	2
15	*1/2	*1	*0	2	2
18	0.268(0.202)	0.612(0.647)	0.555(0.632)	3	3
19	*19/32,13/32	−1(0.970)	*0	2	2
22	0.355(0.304)	0.909(0.748)	0.673(0.745)	3	3
23	*1/2	−1(0.968)	*0	2	2
25	0.452(0.447)	0.926(0.844)	0.456(0.424)	2,3	2
26	0.382(0.277)	0.872(0.828)	0.469(0.299)	2	2
27	*1/2,9/16	*1	*0	2	2
28	*23/48,25/48	0.755(0.606)	−0(0.393)	2	2
29	*1/2	*1	*0	2	2
30	*1/2	−1(0.690)	0.673(0.794)	3	3
32	*0	*−0	−-∞	1	1
33	*29/96,59/120	−1(0.956)	−0(0.172)	2	2
34	*1/4	−1(0.758)	*0	2	2
35	0.348(0.424)	−1(0.958)	0.259(0.122)	2,3	2
36	*1/16	0.654(0.591)	*0	2	2
37	0.407(0.416)	−1(0.920)	0.490(0.289)	2	2
38	*9/32	−1(0.795)	*0	2	2
43	*1/2	−1(0.941)	0.426(0.348)	2,3	2
44	*1/6	0.654(0.690)	−0(0.020)	2	2
45	*1/2	−1(0.700)	0.657(0.780)	3	3
46	*3/8	−1(0.704)	*0	2	2

表 1: C は特性指数から類推された分類，*C は現象論的分類

４．おわりに

セル構造オートマトンのルール関数の再帰的方程式を基に，特性指数を定義し，それを用いて，現象論的分類との関連性を議論した。ここで分類できなかったいくつかのルールは，時間ステップに対する収束性の悪いものである。とりわけ残念なことに，Class IV についての明確な議論が現時点では出来なかった。これは，３近傍ルールにおいて Class IV に属していると考えられているのはルール#110 であるが，その性質がふるまいとして表れるのは，時間ステップが 100 程度以上になってからである。我々のコンピュータ解析では，そこまで議論することができず，今後の大きな課題となっている。また，フラクタル次元のうち，容量次元のみを用いたが，情報次元についても若干の議論が出来るよう，現在考察中である。今後，５近傍ルールや，２次元セル構造オートマトンの考察も，重要な課題と言えよう。

参考文献

[1] S.Wolfram, "Universality and complexity in cellular automata", Physica, 10D (1984) 1.

[2] Y.Kayama, M.Tabuse, H.Nishimura, T.Horiguchi, "Characteristic Parameters and Classification of One-dimensional Cellular Automata", BAIKA Coll. preprint, (1992).