3X−6

# ファジィ部分可到達行列の更新アルゴリズム*

三田村 保　　大内 東[†]

北海道大学工学部[‡]

## 1 はじめに

対象の構造が複雑であるシステムをコンピュータ援用のもとで解析する構造モデリングがある．構造モデリングとは，システムの構成要素集合とその上に定義される二項関係に注目し，システムの構造を有向グラフ等を用いて解析する方法であり，代表的手法の一つとして，J. N. Warfield氏らが提案したISM（Interpretive Structural Modeling）がある[1]．

大内らは従来のISMの拡張として，人間の思考過程に忠実な機能を備えた，部分可到達行列モデルの理論に基づく柔軟なISM（Flexible ISM），「FISM」を提案している[2][3]．

著者らはFISMの拡張として構成要素の関係を二項関係でなく，ファジィ二項関係とするFuzzy Flexible Interpretive Structural Modeling「FISM/FUZZY」を提案している．

本稿ではFISMの機能の部分可到達行列および含意理論の拡張として未知要素を含んだファジィ可到達行列であるファジィ部分可到達行列を定義し，ファジィ部分可到達行列を更新するための一般含意理論を提案する．

## 2 諸定義

本稿で使用する諸定義を述べる．

- $N=\{1,2,\cdots,n\}$：システム要素に対する添字集合，$J=N\times N$とする．
- $R=\{(i,j)|i,j\in N\}\supseteq J$：$N$上の反射的かつ推移的二項関係(擬順序関係)
- $F$：$N$を添字集合する正方ファジィ行列で，その$(i,j)$要素の値$f_{ij}$は関係 ${}_iR_j$ への帰属度を表す．

$$0\le f_{ij}\le 1$$

- ファジィ行列$A,B$に対して次の演算を定義する．

$$(A+B)_{ij} = \max(a_{ij},b_{ij}) \quad (1)$$
$$(AB)_{ij} = \max_k[\min(a_{ik},b_{kj})] \quad (2)$$

*An Algorithm for Updating Fuzzy Partially filled Reachability Matrix

†Tamotsu Mitamura and Azuma Ohuchi

‡Hokkaido University

**定義 2.1** ファジィ可到達行列とは以下の条件を満たす正方ファジィ行列$F$である．$I$は単位行列である．

$$F+I = F \quad (3)$$
$$F^2 = F \quad (4)$$

### 2.1 部分的既知なファジィ行列

**定義 2.2** 部分的既知なファジィ行列とは，要素の値に$[0,1]$の区間値を持つ行列$F$である．$F$の$(i,j)$要素の最大値を$f_{ij}.max$，最小値を$f_{ij}.min$と書く．

$$F(i,j)=\begin{cases} f_{ij}.max \\ f_{ij}.min \end{cases}$$

$$0\le f_{ij}.min\le f_{ij}.max\le 1$$

最大値と最小値が一致しているとき既知要素とし，それ以外を未知要素と呼ぶ．

**定義 2.3** 部分的既知なファジィ行列$F$の最大値，最小値の値が全ての要素において一致しているとき$F$はファジィ行列である．

**定義 2.4** $F$が部分的既知な反射的ファジィ行列とは，対角要素がすべて1である部分的既知なファジィ行列である．

### 2.2 ファジィ部分可到達行列

部分可到達行列の一般化であるファジィ部分可到達行列を定義する．

**定義 2.5** ファジィ部分可到達行列とは部分的既知な反射的ファジィ行列でかつ以下のファジィ無矛盾・極大性を満たす行列である．

ファジィ無矛盾・極大性

$F$ファジィ無矛盾・極大であるとき$(i,j)$要素について

$$f_{ij}.min < \min(f_{ik}.min, f_{kj}.min) \quad (5)$$
$$f_{ik}.max < \min(f_{ij}.max, f_{jk}.min) \quad (6)$$
$$f_{kj}.max < \min(f_{ij}.max, f_{ki}.min) \quad (7)$$

のいずれかの条件を満たす要素の三組$(i,j,k)$が存在しないことをいう．

**定理 2.1** ファジィ部分可到達行列$F$の全ての要素が既知要素であるとき$F$はファジィ可到達行列である．

**定義 2.6** ファジィ部分可到達行列$F$の区間値が0または1の二値のみのとき部分可到達行列である．

## 3 ファジィ部分可到達行列の一般含意

ファジィ部分可到達行列の一般含意を定義する.

**定義 3.1** 一般含意とはファジィ部分可到達行列 $F$ の未知要素 $F(i,j)$ の区間値を現状より区間を狭めたとする. 新たな $F$ が再びファジィ部分可到達行列となるために入力された値から他の未知要素 $F(l,m)$ の区間を狭めることである.

未知要素 $F(i,j)$ の区間値を狭めるということは最小値 $f_{ij}.min$ と最大値 $f_{ij}.max$ をそれぞれ $f'_{ij}.max$ , $f'_{ij}.min$ に変更することである. 以下の4通りの条件の時, 未知要素である $F'(l,m)$ の区間 $f'_{lm}$ が狭まる. ただし $f_{ij}.min < f'_{ij}.min, f'_{ij}.max < f_{ij}.max$ である.

• 最小値 $f_{ij}.min$ を $f'_{ij}.min$ に変更したとき

1) $f_{lm}.min < \min(f'_{ij}.min, f_{li}.min, f_{jm}.min)$ のとき

$$f'_{lm}.min = \min(f'_{ij}.min, f_{li}.min, f_{jm}.min) \quad (8)$$

2) $f_{lm}.max < \min(f'_{ij}.min, f_{jl}.min)$ のとき

$$f'_{lm}.max = \min(f_{lm}.max, f_{im}.max) \quad (9)$$

3) $f_{lj}.max < \min(f'_{ij}.min, f_{mi}.min)$ のとき

$$f'_{lm}.max = \min(f_{lm}.max, f_{lj}.max) \quad (10)$$

• 最大値 $f_{ij}.max$ を $f'_{ij}.max$ に変更したとき

4) $f'_{ij}.max < \min(f_{il}.min, f_{mj}.min)$ のとき

$$f'_{lm}.max = \min(f_{lm}.max, f'_{ij}.max) \quad (11)$$

**定理 3.1** ファジィ部分可到達行列 $F$ を一般含意で生成された $F'$ はファジィ部分可到達行列となる.

**定理 3.2** ファジィ部分可到達行列の一般含意理論は区間値が0または1の二値のみのとき部分可到達行列の含意理論となる.

## 4 更新アルゴリズム

ファジィ具象化とは, ファジィ部分可到達行列 $F$ の未知数の区間を狭めると同時に, 他の未知数の区間を狭めながら $F$ のファジィ無矛盾・極大性を維持する. 最終的に $F$ を全体が既知なファジィ可到達行列にすることである. この過程における $F$ の更新アルゴリズムの概略を以下に記す.

1. 前処理（要素集合 $N$ と関係 $R$ の決定. $F$ の対角要素を1, 他の要素を未知数とし, 最大値を1, 最小値を0とする.）

2. モデル生成者にとって満足のするモデルとなるまで以下を繰り返す.

   (a) 二項対間の関係の曖昧度の決定

   (b) 要素の付加

   (c) 要素の削除

### 4.1 例題

簡単な例題で示す. 要素集合を $N = \{1,2,3,4\}$ とする. $F(1,2) = 0.5$, $F(2,1) = 0$, $F(4,3) = 0.6$ の情報を入力した時点では $F$ は以下のようになり, ファジィ無矛盾・極大である.

$$F = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0.5 & [0,1] & [0,1] \\ 2 & 0 & 1 & [0,1] & [0,1] \\ 3 & [0,1] & [0,1] & 1 & [0,1] \\ 4 & [0,1] & [0,1] & 0.6 & 1 \end{array}$$

ここで $F(2,3) = 0.7$ の情報を入力すると, 以下の未知数に制約条件が生じる.

$$f_{13}.min = 0.5, f_{31}.max = 0, f_{42}.max = 0.6$$

新たな $F$ は以下の通りで, ファジィ部分可到達行列である.

$$F = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0.5 & [0.5,1] & [0,1] \\ 2 & 0 & 1 & 0.7 & [0,1] \\ 3 & 0 & [0,1] & 1 & [0,1] \\ 4 & [0,1] & [0,0.6] & 0.6 & 1 \end{array}$$

逆に $F(2,3) = 0.2$ の情報を入力すると, 以下の未知数に制約条件が生じ, 更新後の $F$ は以下の通り.

$$f_{13}.min = 0.2, f_{24}.max = 0.2, f_{31}.max = 0.0$$

$$F = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0.5 & [0.2,1] & [0,1] \\ 2 & 0 & 1 & 0.2 & [0,0.2] \\ 3 & 0 & [0,1] & 1 & [0,1] \\ 4 & [0,1] & [0,1] & 0.6 & 1 \end{array}$$

## 5 むすび

本稿では FISM の拡張として未知要素を含むファジィ行列であるファジィ部分可到達行列 $F$ と $F$ の未知数に既知の値を入力したとき, 更新した $F$ が再びファジィ部分可到達行列であるための更新アルゴリズムを提案した. これにより従来の FISM 法に比べて関係の有無のみならず曖昧な関係を考慮した柔軟な構造モデリングを行えるようになる. また FISM における部分可到達行列と含意理論はファジィ部分可到達行列と一般含意理論の特殊な場合となる.

## 参考文献


[1] J.N.Warfield : *Societal Systems-Planning, Policy and Complexity* , John Wiley & Sons (1976).

[2] Ohuchi, A. and Kaji, I. : Correction Procedures for Flexible Interpretive Structural Modeling, *IEEE Trans. SMC*, Vol. SMC-19, No 1, pp.85-94(1989).

[3] 栗原, 大内, 加地 : ISM における推移的具象化の一般化, 電学論 C, 104, 1 (昭 59)