平面グラフで長さの総和最小な非交差道を求めるアルゴリズム

2X−5

高橋淳也　鈴木均　西関隆夫
東北大学

1．まえがき

平面に埋め込まれているグラフ，即ち平面グラフで，指定された k 個の端子対間の互いに点素で長さの総和が最小な k本の道を求める問題は VLSI の一層配線問題等に応用可能である．しかし，この問題は NP-完全であるので[1][2]，効率のよいアルゴリズムはありそうにない．ここで，グラフの辺は VLSI の配線領域に対応している．1つの配線領域に複数の配線を通せる場合には，この一層配線問題は長さの総和が最小である "非交差道" を求める問題に帰着する．ここで，"非交差道" とは点や辺を共有するかもしれないが互いに平面上で交差はしていない道のことである．非交差道を求める問題に対しては，端子が置かれる面の個数に制約がある場合に対しては効率のよいアルゴリズムがあることが期待される．このような背景から，本文では，平面グラフ上で，k個の端子対がグラフの指定された2つの面の周上にのみ存在する場合に，長さの総和最小な k本の非交差道を求める $O(n\log n)$ 時間のアルゴリズムを与える．ここで，n は平面グラフ G の点数である．このアルゴリズムは，例えば，VLSI配線の最終段階に現れる，チップの外周に置かれたパッドと内部ブロック周囲にあるピン間を結ぶ一層配線問題に適用できる（図1参照）．なお，平面グラフの2つの面の周上に端子が指定されているとき，(長さの総和最小とは限らない) 点素な道を求める $O(n\log n)$ 時間のアルゴリズムが知られている[3],[4]．

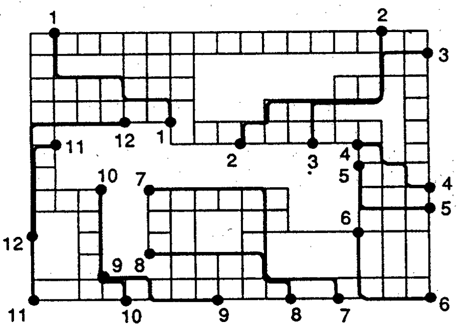


図1．非交差道問題の VLSI 配線問題への応用例

2．準備

本章では，用語と問題の定義を示す．G は 2-連結無向平面グラフであるとし，G の辺には非負の重み付けがなされているとする．G は平面 R^2上に埋め込まれているとする．G の R^2上の像を $Image(G)\subset R^2$ と書く．$R^2-Image(G)$ の連結成分を G の面と呼ぶ．道で連結したい2点 s_iと t_iからなる対 (s_i,t_i) を端子対と呼ぶ．本文では，端子対の個数を kと表す．また，端子はすべて G の指定された2つの面の周上にあるものとする．

本文では次の非交差道問題を解くアルゴリズムを与える．

非交差道問題

平面グラフ G，および G の2つの面の周上にある点からなる k個の端子対 (s_i,t_i)，$i=1,2,\cdots,k$，が与えられたとき，各端子対間を結ぶ，長さの総和が最小な k本の非交差道を求めよ．

3．1つの面の周上に端子がある場合

本章では，端子が1つの面 fの周上にのみ存在する場合の非交差道問題を解くアルゴリズムを与える．一般性を失うことなく fは外面であるとする．端子対の配置に応じて，以下に示す2つの場合わけをする．

場合1：必要ならば端子 s_iと t_iを入れ換えたり，端子対番号を付け換えたりしたときに，端子 s_1，t_1，s_2，t_2，$\cdots$，s_k，t_kがこの順序で面 f の周上で時計回りに現れる場合．

場合2：その他の場合．

まず，場合1に対するアルゴリズムを与える．

STEP1．s_1から s_i，$2\le i\le k$，までの最短路木を Tとする；

STEP2．s_iから T上を s_{i+1}（$i=k$の場合は $i+1=1$ とする）まで行き，次に s_{i+1}から外周上を反時計回りに s_iまで戻ってくる閉路の内部にある G の極大部分グラフを G_iとする．各 G_i，$1\le i\le k$，で端子対 (s_i,t_i) 間の最短路を求める．

P_iはグラフ G でも (s_i,t_i) 間の最短路であるので，$P_1,P_2,\cdots,P_k$は非交差道問題の最適解である．図2に上述のアルゴリズムの説明図を示す．同図で，道 P_iは太い実線で，Tは破線で描かれていて，STEP2で求める部分グラフ G_iは色分けされている．

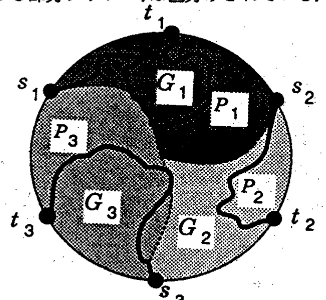


図2．場合1のアルゴリズムの説明図

STEP1 は $O(T(n))$ 時間で終了する．ここで，$T(n)$ は点数 n の平面グラフ上で1点から全点間の最短路を求めるのに要する時間を表す．また，平面グラフ G の各辺が部分グラフ $G_1,G_2,\cdots,G_k$の高々2個にしか現れないので，STEP2 は $O(T(n))$ 時間で実行できることがわかる．ゆえに，上のアルゴリズムは場合1の解を $O(T(n))$ 時間で求める．

場合2のアルゴリズムは場合1のアルゴリズムを用いて構成される．外周 f上を時計回りに進んだときに，v_1，v_2，$\cdots$，v_bの順で f の点が現れるとする．また，一般性を失うことなく $s_1=v_1$であり，s_1 $(=v_1)$ から外周 f上を反時計回りに t_1まで行く道に，s_1，t_1以外の端子が現れないとする．さらに，各端子対 (s_i,t_i) に関して，外周 fを v_1から時計回りに進んだときに最初に s_iが現れ，次に t_iが現れるとし，s_1，s_2，$\cdots$，s_kがこの順に現れるとする．

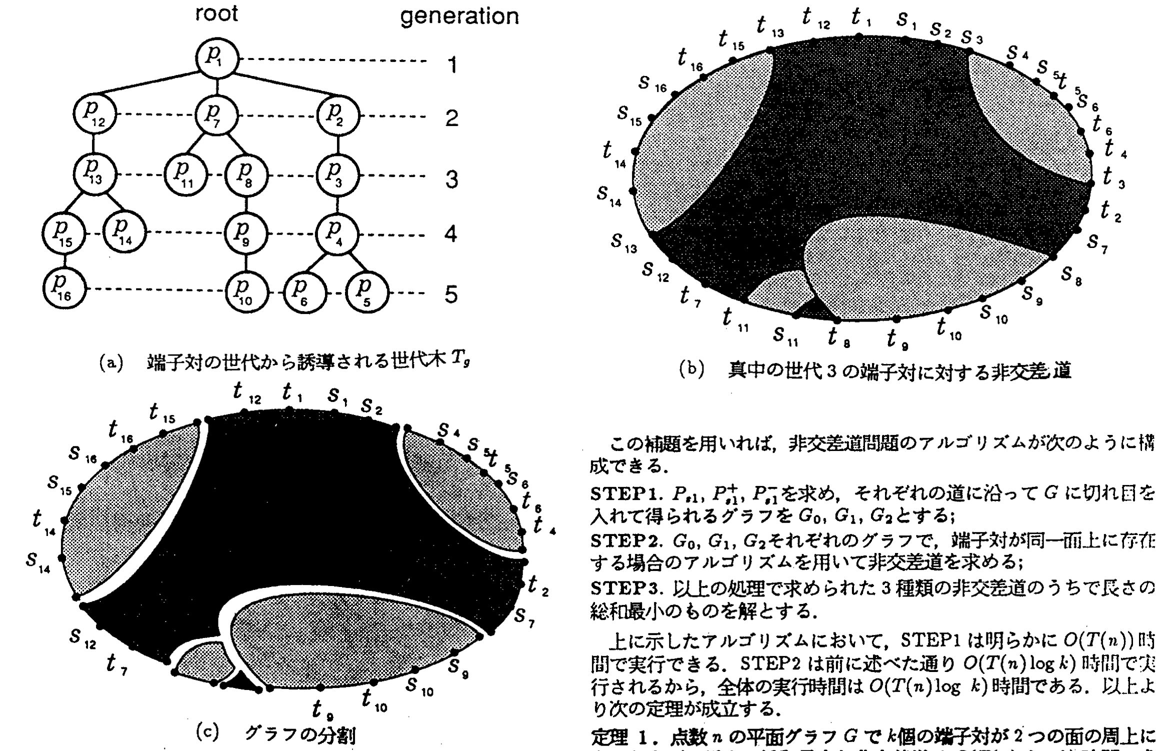
G の道 Pに関する切れ目グラフとは，次のように Pを P'と P''という2本の道に置き換えて得られるグラフであるとする．まず Pの各点 vを二つの点 v'と v''で置き換える．P上の各辺 (v_j,v_{j+1}) を2本の平行な辺 (v'_j,v'_{j+1}) と (v''_j,v''_{j+1}) で置き換える．Pの辺ではないが，Pの点 vに接続している辺 (v,w) に対して，(v,w) が $image(P)$ の右側にあるならば (v',w) として置き換え，左側にあるならば (v'',w) として置き換える．以上の操作をグラフ G に Pに沿って切れ目を入れるという．

fの周上の各点 vに対して，$index(v)$ は vの添字を示すものとする．即ち，$v=v_i$ならば $index(v)=i$ である．この記法を用いて端子対の親子関係を定義する．

$index(s_i)<index(s_j)<index(t_j)<index(t_i)$ が成立しているとき，(s_i,t_i) は (s_j,t_j) の先祖であるといい，(s_j,t_j) は (s_i,t_i) の子孫であるという．$index(s_i)<index(s_j)<index(t_i)<index(t_j)$ のときは，明らかに非交差道は存在しない．(s_i,t_i) の先祖の内で，最大の端子対番号を持つ先祖を (s_i,t_i) の親と呼び，(s_i,t_i) を親の子と呼ぶ．各端子対 $p_i=(s_i,t_i)$ を1つの節点 p_iとして持ち，端子対間の親子関係から誘導される木を T_gと書く．親を持たない端子対 (s_1,t_1) に対応する節点 p_1を木 T_gの根という．端子対 (s_i,t_i) に対応する T_g

An Algorithm for Finding Non-Crossing Paths with Minimum Total Length in Planar Graphs

Jun-ya Takahashi, Hitoshi Suzuki and Takao Nishizeki
Tohoku University



(a) 端子対の世代から誘導される世代木 T_g

(b) 真中の世代 3 の端子対に対する非交差道

(c) グラフの分割

図3．場合 2 のアルゴリズムの説明図

の節点 p_i の深さに 1 を加えた数を端子対 (s_i, t_i) の世代という．

場合 2 に対するアルゴリズムのアイディアは 2 つある．まず最初のアイディアは，同じ世代の端子対の集合は場合 1 の性質を満たすので，同じ世代の端子対間の非交差道問題の解は場合 1 の解法で求められるということである．また，ある世代に含まれる端子対に関して場合 1 の解法によって得られる道に沿って G に切れ目を入れて G を分割したとき，各連結成分に存在する端子対間の G における最短路の 1 つはその連結成分中に存在する．したがって世代 1 から順に世代毎に場合 1 の解法により非交差道を求めればよいが，単純にインプレメントすると $O(kT(n))$ 時間かかってしまう．そこで，まず真中の世代の端子対を結ぶ非交差道を求め，それらの道に沿って G に切れ目を入れて得られるグラフの連結成分毎に上半分と下半分の世代の非交差道を求めるという分割統治法を用いる．これが 2 番目のアイディアである．図 3 に例を示す．図 3(a) は端子対の世代から誘導される (世代) 木 T_g を表している．図 3(b)-(c) は端子対の世代をもとに，真中の世代である世代 3 の端子対を結ぶ非交差道を求め (図 3(b))，求まった非交差道に沿って G に切れ目を入れて G を分割した様子を示している (図 3(c))．

紙面の制約上詳細は述べないが，以上より，計算時間が $O(T(n)\log k)$ のアルゴリズムが構成できることが示される．

4．2 つの面の周上に端子がある場合

本章では，2 つの面の周上に端子がある場合のアルゴリズムを与える．2 つの面の周上にまたがっている端子対がない場合には，前節のアルゴリズムをそれぞれの周上にある端子対に対して適用すれば最適解が求まる．従って 2 つの面の周上にまたがる端子対が存在するとし，その 1 つを (s_1, t_1) とする．G 上の s_1 と t_1 の間の最短路を P^0_{s1} とする．また，P^0_{s1} に沿って G に切れ目を入れて得られるグラフを G'_0 とする．G'_0 上には s_1 を置き換えた 2 点 v, v' と，t_1 を置き換えた 2 点 w, w' が存在する．v, v', w および w' は，G'_0 で同一面 f の周上に存在する．ここで，f を v から時計回りに進んだとき，v, w, w', v' がこの順で現れるものとする．グラフ G'_0 における v と w' の間の最短路および v' と w の間の最短路に対応する G の 2 本の道を，それぞれ P^+_{s1} および P^-_{s1} と書く．このとき次の補題が成立する．

補題 1． **s_1 と t_1 を結ぶ道が P^0_{s1}, P^-_{s1}, P^+_{s1} のいずれかであるような非交差道問題の最適解が存在する．**

この補題を用いれば，非交差道問題のアルゴリズムが次のように構成できる．

STEP1. P_{s1}, P^+_{s1}, P^-_{s1} を求め，それぞれの道に沿って G に切れ目を入れて得られるグラフを G_0, G_1, G_2 とする;

STEP2. G_0, G_1, G_2 それぞれのグラフで，端子対が同一面上に存在する場合のアルゴリズムを用いて非交差道を求める;

STEP3. 以上の処理で求められた 3 種類の非交差道のうちで長さの総和最小のものを解とする．

上に示したアルゴリズムにおいて，STEP1 は明らかに $O(T(n))$ 時間で実行できる．STEP2 は前に述べた通り $O(T(n)\log k)$ 時間で実行されるから，全体の実行時間は $O(T(n)\log k)$ 時間である．以上より次の定理が成立する．

定理 1． **点数 n の平面グラフ G で k 個の端子対が 2 つの面の周上にあるならば，長さの総和最小な非交差道は $O(T(n)\ \log k)$ 時間で求まる．**

なお，平面グラフで最短路を求めるアルゴリズムとして Frederickson の方法を用いれば $O(n\sqrt{\log n})$ 時間の前処理を施した時に，$T(n) = n$ である[7]．従って $O(n(\sqrt{\log n} + \log k)) = O(n \log n)$ 時間で最適解が求まる．

5．むすび

本文では，k 個の端子対が平面グラフの指定された 2 つの面の周上にのみ存在する場合に，長さの総和最小な k 本の非交差道を求める多項式時間アルゴリズムを与え，その計算時間が $O(n \log n)$ であることを示した．今後の課題として，アルゴリズムをより高速化すること，3 つ以上の面の周上に端子があるより一般的な場合に対するアルゴリズムを求めること等があげられる．

参考文献

[1] J. F. Lynch, "The equivalence of theorem proving and the interconnection problem," ACM SIGDA, the Netherlands (1982).

[2] M. R. Kramer and J. van Leewen, "Wire-rooting is NP-complete," Report Mo.RUU-CS-82-4, Department of Computer Science, University of Utrecht, Utrecht, The Netherlands (1982).

[3] 鈴木均, 赤間長浩, 西関隆夫, "平面グラフで林を求めるアルゴリズム －指定された二つの面の両方にまたがる端子がある場合－," 信学論 A, Vol.J71-A, No.10, pp.1897-1905 (1988).

[4] 鈴木均, 赤間長浩, 西関隆夫, "平面グラフで林を求めるアルゴリズム －各ネットの端子が指定された二つの面の片方にある場合－," 信学論 A, Vol.J71-A, No.12, pp.2163-2171 (1988).

[5] H. N. Gabow and R. E. Tarjan, "A linear-time algorithm for a special case of disjoint set union," Journal of Computer and System Sciences, 30, pp.209-221(1985).

[6] 鈴木均, 赤間長浩, 西関隆夫, "平面グラフで内素な道を求めるアルゴリズム," 信学論 A, Vol.J71-A, No.10, pp.1906-1916 (1988).

[7] G. N. Frederickson, "Fast algorithms for shortest path in planar graphs, with applications," SIAM J. Comput., 16, pp.1004-1022 (1987).