グラフをC-三角化するアルゴリズム

2X−4　小熊　卓　　中野　眞一　　西関　隆夫
東北大学

1　まえがき

本文では自己ループや多重辺のないグラフ，すなわち単純グラフ $G=(V,E)$ を扱い，単にグラフと呼ぶ．ここで V は G の点集合であり，E は辺集合である．$n=|V|$ は点の個数，$m=|E|$ は辺の本数である．

与えられたグラフ G が k 色で点彩色されているとし，その彩色を $c:V\rightarrow\{1,2,\cdots,k\}$ とする時，次の条件(a)及び(b)を満たすグラフ $G_T=(V',E'),V'=V,E\subseteq E'$ をグラフ G の c-三角化という．

(a) グラフ G_T の，任意の4点以上からなる点誘導部分グラフは閉路でない

(b) c はグラフ G_T の点彩色である．

本文では，c がグラフ G の3色による点彩色である時の c-三角化を考える．G が3色で点彩色されている時，G を c-三角化する $O(\alpha(n)\cdot n)$ 時間アルゴリズムが知られている[3]．ここで $\alpha(n)$ はアッカーマン関数の逆関数である．本文では $O(n)$ 時間アルゴリズムを与える．

グラフの c-三角化は以下のような系統木推定問題に応用できる[3]．

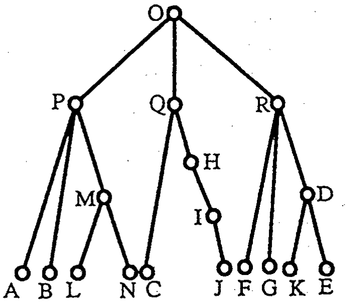
入力は l 種類の(生物)種及び各(生物)種の特徴である(図1)．種は k 個の特徴項目 α についてそれぞれ特徴 α_i を持っているとする．各特徴 α_i はいくつかの種で共通であるかもしれない．この時，これらの種の系統木(図2)を推定して出力するのが系統木推定問題である．ただし，系統木において点は種に対応する．葉点は入力の種に対応し，内点は入力の種または推定された種に対応する．推定された種については各特徴項目の特徴が推定される．また共通の特徴を持つ種は系統木上で1つの部分木を構成するものとする．なお，このような系統木が常に存在するとは限らない．

この問題を解くために，次のようなグラフ G を作成する(図3)．G の点は各特徴 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\beta_1,\beta_2,\cdots,\gamma_1,\gamma_2,\cdots$ に対応する．特徴 α_i,β_j を持つ種が存在する時，かつその時に限り G に辺 $\alpha_i\beta_j$ を付け加える．G の各クリークはクリークに含まれる点に対応する特徴を全て持つ種に対応する．G のクリークは高々 k 点からなる．ここで G のクリークとは G の極大完全部分グラフのことである．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ を同じ色，$\beta_1,\beta_2,\cdots$ を同じ色，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots$ を同じ色とみなすと，グラフ G は3色で彩色されている．この彩色を c とする．

系統木が存在する必要十分条件は，G の c-三角化グラフ G_T が存在することである[2]．G_T が存在するときは G_T から系統木が構成できる[2]．系統木が存在するにもかかわらず G_T が存在しないと仮定すると，点彩色の条件を壊すことなく G に辺を任意本数追加したグラフ G'_T には必ず閉路 $v_1v_2\cdots v_rv_1$ を誘導する $r\geq 4$ 点の点集合 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_r\}$ が存在する．系統木で $v_1,v_2,\cdots,v_r$ はそれぞれ部分木 $T_1,T_2,\cdots,T_r$ に対応する．T_1 は T_2,T_r と共通点を持つが，$T_3,\cdots,T_{r-1}$ とは共通点を持たない．T_r は T_1,T_{r-1} と共通点を持つが $T_2,\cdots,T_{r-2}$ とは共通点を持たない．同様に $2\leq i\leq r-1$ なる T_i は T_{i+1},T_{i-1} とのみ共通点を持つ．このとき G'_T に対応する系統木に閉路が存在することになり矛盾する．G から G_T を作る時に新たに追加された辺は，種の存在を推定することに相当する．図3で G は実線で，G_T は実線と点線で描かれている．

	特徴項目				特徴項目		
	α	β	γ		α	β	γ
種 A	α_1	β_3	γ_2	種 H	α_3	β_1	γ_1
B	α_1	β_4	γ_2	I	α_3	β_5	γ_1
C	α_1	β_1	γ_3	J	α_3	β_5	γ_4
D	α_2	β_6	γ_1	K	α_4	β_6	γ_1
E	α_2	β_6	γ_5	L	α_5	β_7	γ_2
F	α_2	β_2	γ_6	M	α_5	β_2	γ_2
G	α_2	β_2	γ_7	N	α_5	β_2	γ_8

図1　系統木推定問題の入力例



	特徴項目		
	α	β	γ
種 O	α_1	β_2	γ_1
P	α_1	β_2	γ_2
Q	α_1	β_1	γ_1
R	α_2	β_2	γ_1

図2　系統木推定問題の出力例

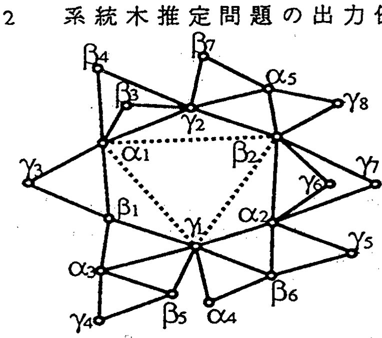


図3　グラフGとその
C-三角化グラフG_T

2　アルゴリズム

グラフ G の道 P とは $P=v_0v_1v_2\cdots v_{k-1}v_k$ の形をした点列である．但し P に同じ点は2度以上現れないものとする．v_0 を P の始点といい，v_k を終点という．$v_0=v_k$ なる道を閉路という．P に含まれる辺数を $|P|$ と書き，P の長さと呼ぶ．P の点集合を $V(P)$，辺集合を $E(P)$ とする．

An argorithm for c-triangulation graphs
Takashi Oguma, Shin-ichi Nakano, Takao Nishizeki
Tohoku University

G を c-三角化するには，G の各２連結成分を c-三角化すればよい．

いくつかの補題を与える．

[補題１] グラフ G が２連結であり，かつ単純閉路でないとき，点 x,y以外で点素な３本の x から yへの道 P_1, P_2, P_3が存在するような２点 x,yが存在する．(証明略)

[補題２] ３色で彩色されているグラフ G が c-三角化可能ならば，K_4に位相同形な部分グラフを含まない (証明略)

[補題３] グラフ G は２連結で単純閉路でないとし，c-三角化できるとする．このとき次の (1) および (2) が成立する．

(1)G には次の (a) と (b) を満足する点 x,yが存在する．

(a) 点 x,y以外で互いに点素な x から yへの３本の道 P_1, P_2, P_3 が存在する．

(b)P_1および P_2の x,y以外の点は全て２次である．

(2)G の c-三角化グラフ G_Tには辺 xyがある．(証明略)

補題３の (a),(b) を満たす２点 x,yを端点と呼ぶ

[補題４] G に点 x,y以外で点素な３本の x から yへの道 P_1, P_2, P_3 が存在し，G が c-三角化可能ならば，G_Tには $v \in V(P_1), w \in V(P_2)$, $v \neq x,y$, $w \neq x,y$なる辺 vwは存在しない．(証明略)

補題３，補題４より，２連結グラフ G が端点 x,yを含むとき，３つのグラフ $G - E(P_1) - E(P_2) + xy$, $P_1 + xy$, $P_2 + xy$ が，それぞれ c-三角化可能なときのみ，G が c-三角化可能であることがわかる．$P_1 + xy, P_2 + xy$, は単純閉路である．以上より，２連結グラフ G を c-三角化するアルゴリズムが得られる．

```
procedure COMPONENT(G)
begin
    if   Gは単純閉路   then   TRI-CYCLE(G)  {後述}
    else
        if   端点がない   then
            "c-三角化不可能"と出力して停止
        else{ 端点を x,yとする }
            if   x,yは同じ色で塗られている   then
                "c-三角化不可能"と出力して停止
            else
              begin
                COMPONENT(G − E(P1) − E(P2) + xy);
                TRI-CYCLE(P1 + xy);
                TRI-CYCLE(P2 + xy)
              end
end
```

単純閉路の c-三角化については以下の補題が成立する．

[補題５] ２色で彩色されている長さ４以上の単純閉路は c-三角化できない．(証明略)

[補題６] ３色で点彩色されている単純閉路は $O(n)$ 時間で c-三角化できる．

(証明) 次のアルゴリズムにより単純閉路は c-三角化できる．なお単純閉路 C中で使われている３色をα, β, γとし，点 vの色を $c(v)$ で表す．点 vの隣接点を v^-, v^+と書き，C上で時計回りに v^-, v, v^+ の順に現れるとする．

```
procedure   TRI-CYCLE(C)
begin
  if   (|V| ≤ 3)   then   停止;
  {各色 α,β,γで彩色されている点の個数を nα,nβ,nγとする}
  if   Cが２色以下で彩色されている   then
       "c-三角化不可能"と出力して停止
  else
   begin
        v := Cの任意の点;
        CT := C;
        while   nα > 1, nβ > 1 and nγ > 1  do
            if   c(v−) = c(v+)  then
                v := v+ {時計方向へ１つ移動}
            else
                begin
                  C := C − vv− − vv+ + v−v+;
                  CT := CT + v−v+;
                  nc(v) := nc(v) − 1;
                  v := v− {反時計方向に１つ移動}
                end;
        {nδ = 1 とする．δ = α, β, or γ}
        c(v) = δなる点 v ∈ Vを探す;
        for vの２つの隣接点を除く全ての yについて do
            CT := CT + vy;
   end
end
```

上のアルゴリズム TRI-CYCLE では単純閉路 C上の同じ点は高々３回しかたどらないので，$O(n)$ 時間で Cを c-三角化できる．

(証明終)

以上より，グラフ G を c-三角化するアルゴリズムが得られる．G_Tは２-部分木 [1] であることが知られており [3]，平面グラフである．したがって G が平面描画できないときは G は c-三角化不可能であることがわかる．グラフ G を平面描画することにより，サブルーチン COMPONENT 中で端点を効率よく見つけることができる．

```
procedure   c-TRIANGULATION(G)
begin
    Gを２連結成分へ分解する;
    for   各２連結成分 Gi   do
        begin
            if   Giは平面グラフである   then
                 Giを平面描画する;
                 COMPONENT(Gi)
            else   "c-三角化不可能"と出力して停止
        end
end
```

[定理１] 点数 n のグラフ G とその３-点彩色 c が与えられたとき，G が c-三角化できるかどうか判断し，できるならばその c-三角化グラフ G_Tを求めることが $O(n)$ 時間でできる．(証明略)

3　むすび

本論文では３色で点彩色されているグラフ G を $O(n)$ 時間で c-三角化するアルゴリズムを与えた．より多くの色で点彩色されているグラフ G を c-三角化するアルゴリズム，更に並列アルゴリズムの研究が期待される．

参考文献

[1] D. J. Ross, "On simple characterization of k-trees," Discrete Math. 7 (1974), pp. 317-322.

[2] P. Buneman, "A characterization of rigid circuit graphs," Discrete Math. 9 (1974), pp. 205-212.

[3] S. Kannan and T. Warnow, "Triangulating three-colored graphs," Proc. of the Second Symposium on Discrete Algorithms, San Francisco, CA, January 1991, pp. 337-343.

[4] S. Kannan and T. Warnow, "Inferring evolutionary history from DNA sequences," Proc. of the 31st Symposium on the Foundations of Computer Science, St. Louis, Missouri, Oct. 1990, pp. 362-371.

[5] T.Nishizeki and N.Chiba, "Planar Graphs: Theory and Algorithms," North-Holland, Amsterdam, 1988.

[6] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, "The Design and Analysis of Computer Algorithms," Addison-Wesley, Reading, MA., 1974.