

移流拡散系と硬い常微分方程式

1 X-5

山口 佳代子

筑波大学 工学研究科

1. はじめに

移流拡散方程式を空間離散化した常微分方程式は、線形多段法を用いて解を導くのが一般的である。線形多段法では、精度を追求するために高次の式が必要になる一方で、高次の式を用いると解は安定しなくなることが知られている。解の安定性を確保するためには、式を低次のものにおさえねばならなくなる。

線形多段法による解の安定性は、線形多段法の特性方程式が示す安定領域の中に、行列Aの全固有値が存在することが条件となる。しかし、様々な問題に対する固有値のふるまいについては、これまであまり論じられていない。固有値の分布についての理解は、実際に線形多段法を適用するときに、式を選択する目安となるはずである。

ここでは、硬い方程式に対する線形多段法の展望を、固有値の分布という視点からながめてみる。実験に取り上げた問題は2次元の熱方程式で、モデルも非常に簡単なものであるが、きわめて興味深い結果を得たのでここに紹介する。

2. 移流拡散方程式

移流項のある2次元の熱方程式：

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(-k \nabla u + b u) = f, \\ \Omega : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d,$$

$$(2.2) \quad u(t, x, y) = 0, \text{ on } \Gamma,$$

を解く。ここで、 $b = (b_x, b_y)^T$ は移流ベクトルを、 k (=一定)は拡散係数を示す。中心差分を用いて空間について離散化すると、次のような常微分方程式：

$$(2.3) \quad u'(t) + A u(t) = f,$$

$$(2.4) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1+r_y & & -1+r_x & & \\ -1-r_y & 4 & & -1+r_y & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ -1-r_x & & -1-r_y & 4 & -1+r_y & -1+r_x \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$(2.5) \quad r_x = \frac{b_x \cdot d_y}{2 \cdot k}, \\ r_y = \frac{b_y \cdot d_x}{2 \cdot k}.$$

を得る。 $b = (0, 0)^T$ のとき、行列Aは対称正定値行列である。

ここで、 d_x と d_y はx, y各方向の格子間隔をあらわしている。

また、セルペクレ数：

$$(2.6) \quad \text{Pec} = \frac{|b \cdot h|}{k},$$

は、拡散項に対する移流項の強さを示している。また、 $\text{Pec} \leq 2$ のとき行列Aは弱対角優位行列でM行列だが、 $\text{Pec} > 2$ のときには複素固有値をもつようになっている。(2.3)式は硬い方程式とよばれ、解を得るためには陰解法の中でも特に安定な方法だけが有効であるとされている。

3. 線形多段法

一般に問題：

$$(3.1) \quad y' = f(t, y), y = y_0,$$

に対するk段の線形多段法は、次式で示される。

$$(3.2) \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i \cdot y_{k-i} = \tau \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot f_{k-i}, \\ \sum_{i=0}^k \beta_i = 1,$$

ここで τ は、時間の刻み幅をあらわしている。解が安定するためには、行列Aの固有値の τ 倍が安定領域のなかに分布しなければならない。原点と安定領域の最少偏角 α が大きいくほど、安定領域が広いという。

ここでは、Zlamal法：

$$(3.3) \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i \cdot \zeta^{k-i} = \tau \beta_0 (\zeta + \zeta_0)^k,$$

を例に固有値と線形多段法の安定性の関係を検証している。 ζ_0 は、任意に選択できる。例として $\zeta_0 = 1/3$ としたときの安定領域をfig.1に示す。行列Aの固有値がある数値解法の不安定領域に入るとき、その数値解は不安定になる。

Stiff Equations Derived from Diffusion-Convection Equations

Kayoko YAMAGUCHI

University of Tsukuba

4. 数値実験

4.1 計算のモデル

モデルとした領域は, fig.2 のとおりである. 19×19 (=361)個の各格子点について離散化を行った. 計算機は, HITAC M660Kを用いている.

4.2 固有値の分布

まず, 移流項が固有値の分布に対してどのように影響するかを示す. 簡単のため, ここでは第1象限のみをグラフにした (fig.3). 実際には, x軸に対称に第4象限にも固有値が分布している.

移流項が大きくなるほど複素固有値の絶対値が大きくなる. また, x, y方向のセルベクレ数を Pec_x, Pec_y とすると, それぞれが2のときを境にしても固有値の分布の様子は変わっている.

また, 格子間隔の比を $1/20 : 1/20$ から, $1/30 : 1/20$ に変えて固有値の分布を調べたが, 固有値の偏角は移流項に影響を受けているようである (fig.4).

5. おわりに

硬い常微分方程式の係数行列Aの固有値の分布については, 以下のようにまとめることができる.

- 1) 移流項が大きくなると, 複素固有値の絶対値が大きくなる.
- 2) 固有値の分布は, Pec, Pec_x, Pec_y が2のときを境に変化する.
- 3) 格子間隔の比は, 固有値の偏角によらず一定である. x方向に長い格子では実固有値の範囲が狭く, 複素固有値の絶対値が大きくなる. また, y方向に長い格子では実固有値の範囲が広く, 複素固有値の絶対値が小さくなる.

参考文献

- 1) Zlamal, Milos : Finite element methods in heat conduction problems (The mathematics of finite elements and applications II. Edited by Whiteman, J. R.), Academic Press(1975), pp. 85-104.
- 2) Manteuffel, Thomas A. : Adaptive procedure for estimating parameters for the nonsymmetric Tchebychev iteration, Numer. Math. 31(1978), pp. 183-208.
- 3) 村田, 名取, 唐木 : 大型数値シミュレーション, 岩波書店(1990).

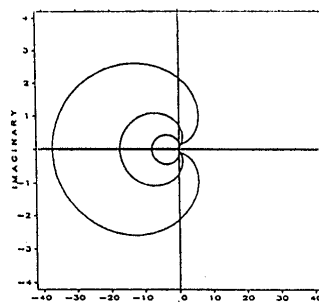


fig.1 $\alpha=1/3$ のときのZlamal法の安定領域. 曲線の外側が安定領域となる. 原点に近い方から順に2, 3, 4次の線形多段法のものである. 次数が高くなるほど安定領域が狭くなっていることがわかる.

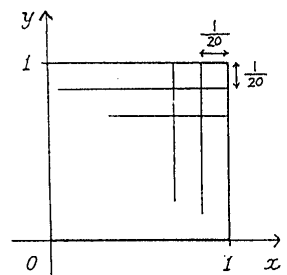


fig.2 計算のモデル. $\Omega : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, k=1.$ 各辺を20に分割する. $d_x=d_y=1/20.$

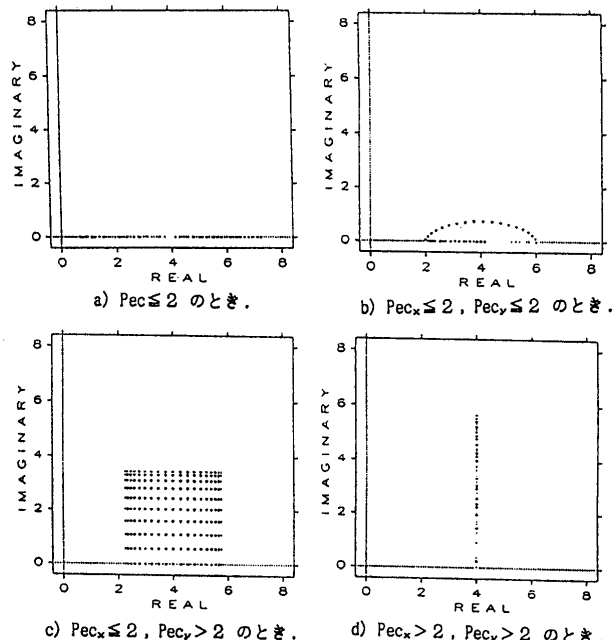


fig.3 数値実験(1). a) $Pec \leq 2$ のとき. b) $Pec_x \leq 2, Pec_y \leq 2$ のとき. c) $Pec_x \leq 2, Pec_y > 2$ のとき. d) $Pec_x > 2, Pec_y > 2$ のとき.

行列Aの固有値を*であらわしている. セルベクレ数に応じて, 固有値の分布は4つのパターンに分類される. c)では $Pec_x > 2, Pec_y \leq 2$ のときも同様な分布をしめす.

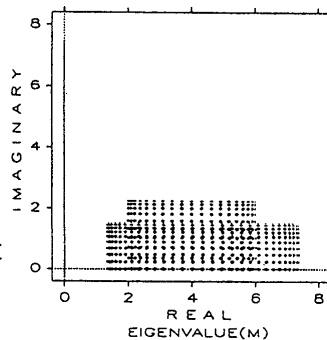


fig.4 数値実験(2). 格子間隔の比を変える. この場合節点数が異なるが, 偏角は変わらない (47.5°).