数値等角写像における２つの定式化の比較

1X−1

天野　要　　安原俊文
愛媛大学　工学部

１．<u>はじめに</u>　与えられた問題領域から標準領域へ，すなわち，(1) Jordan 曲線の内部から単位円の内部へ，(2) その外部から外部へ，(3) ２つの Jordan 曲線で囲まれた有界な２重連結領域から円環領域へ，という３種の等角写像を考える．このような数値等角写像の方法としては Symm の積分方程式法（1966, 1967, 1969）が著名である．これらは Hough & Papamichael (1983) によって統一的な数値計算法として再定式化されている．代用電荷法（1987, 1988a, 1988b）に対しても同様の再定式化（1991）が可能である．しかし，実際の計算に際して，これらの２つの定式化のいずれを使用すべきであるかについてはまだ明確な指針が与えられていない．

本研究では，代用電荷法を対象に，従来の個別的な方法と再定式化された統一的な方法とを比較し，いずれの方法を使用すべきであるかを明らかにする．

２．<u>数値等角写像の方法</u>　従来の個別的な方法と再定式化された統一的な方法の概要を記す．

<u>個別的な方法</u>

(1) 内部等角写像：z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C で囲まれた Jordan 領域 D_I から w 平面上の単位円内部 $|w|<1$ への等角写像 $w=f_I(z)$．D_I 内に原点（正規化点）をとって，条件 $f_I(0)=0$ の下に，近似写像関数

$$F_I(z)=ze^{G_I(z)+iH_I(z)} \qquad (1)$$

$$G_I(z)+iH_I(z)=\sum_{i=1}^{N}Q_i\log(z-\zeta_i) \qquad (2)$$

と拘束条件

$$\sum_{i=1}^{N}Q_i\log|z_j-\zeta_i|=-\log|z_j|,\quad j=1,\cdots,N \qquad (3)$$

が得られる．ζ_i と z_j はそれぞれ D_I の外部と C 上に配置された電荷点と拘束点である．

(2) 外部等角写像：上記 D_I の外部 D_E から単位円外部 $|w|>1$ への等角写像 $w=f_E(z)$．条件 $f_E(\infty)=\infty$ の下に，D_I 内に原点をとって，

近似写像関数

$$F_E(z)=z/\Gamma\cdot e^{G_E(z)+iH_E(z)} \qquad (4)$$

$$G_E(z)+iH_E(z)=\sum_{i=1}^{N}Q_i\log(z-\zeta_i) \qquad (5)$$

と拘束条件

$$\sum_{i=1}^{N}Q_i\log|z_j-\zeta_i|-\log\Gamma=-\log|z_j|,\quad j=1,\cdots,N \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{N}Q_i=0$$

が得られる．電荷点は D_E の外部すなわち D_I の内部に配置される．Γ は C の容量の近似値である．

(3) ２重連結領域等角写像：z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた有界な２重連結領域 D_D から w 平面上の円環領域 $\mu<|w|<1$ への等角写像 $w=f_D(z)$．円環の内部半径 μ の逆数が D_D のモジュラスである．C_1 と C_2 は領域の外側と内側の境界で，それぞれ同心円 $|w|=1$ と $|w|=\mu$ に移るとする．C_2 の内側に原点をとって，

近似写像関数

$$F_D(z)=ze^{G_D(z)+iH_D(z)} \qquad (7)$$

$$G_D(z)+iH_D(z)=\sum_{i=1}^{N}Q_i\log(z-\zeta_i) \qquad (8)$$

と拘束条件

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}Q_i\log|z_j-\zeta_i|=-\log|z_j|,\quad z_j\in C_1,\quad j=1,\cdots,N_1\\&\sum_{i=1}^{N}Q_i\log|z_j-\zeta_i|-\log M=-\log|z_j|,\quad z_j\in C_2,\quad j=1,\cdots,N_2\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{N}Q_i=0$$

が得られる．ここに，$N=N_1+N_2$ で，N_1 個と N_2 個

A Comparison between two formulations for the numerical conformal mapping
Kaname Amano and Toshifumi Yasuhara
Ehime University

の電荷点がそれぞれ C_1 の外側と C_2 の内側に配置されるものとする．M は μ の近似値で，$\sum$ は後者の電荷についての和である．

統一的な方法

一方，問題の３種の領域と境界および対応する写像関数をそれぞれ D と C および $w=f(z)$ と記して，統一的な近似写像関数

$$F(z)=\alpha(z)e^{\beta\sum Q_i\log(z-\zeta_i)} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}&(1)\ \alpha(z)=z, && \beta=1\\ &(2)\ \alpha(z)=1/\Gamma, && \beta=\log\Gamma,\\ & && \Gamma=e^{(\sum Q_i)^{-1}} \qquad (11)\\ &(3)\ \alpha(z)=1, && \beta=\log M,\\ & && M=e^{(\sum Q_i)^{-1}}\end{aligned}$$

と拘束条件

$$\sum Q_i\log|z_j-\zeta_i|=\delta(z_j),\quad j=1,\cdots,N \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}&(1)\ \delta(z_j)=-\log|z_j|\\ &(2)\ \delta(z_j)=1 \qquad (13)\\ &(3)\ \delta(z_j)=0,\quad z_j\in C_1\\ &\qquad\quad\ =1,\quad z_j\in C_2\end{aligned}$$

を得ることができる[1]．

再定式化された統一的な方法は従来の個別的な方法に比較して次のような特徴を持っている．

(a) 拘束条件が電荷 Q_i のみを未知量とする N 元の連立１次方程式に統一された．外部領域と２重連結領域の場合の Γ と M は Q_i の値から計算される．

(b) また，このとき，代用電荷法で解くべき Dirichlet 問題の境界値が $-\log|z_j|$ から定数になった．

前者は３種の等角写像の計算手順の統一を可能にし，後者は次のような意味で重要である．すなわち，外部領域と２重連結領域の場合の数学的表現と計算精度が，本来は等角写像の問題に無関係で，数値計算の都合で導入される座標系の原点の取り方に依存しなくなった．しかも，より高い精度を期待することができる．なお，内部領域の場合には個別的な方法も統一的な方法も同じである．

３．数値例　楕円の例を記す．いずれの場合にも，まず境界上の拘束点を偏角，長さまたは離心角で等間隔になるように，領域に対して正の向きに順次配置し，次いで電荷点を

$$\zeta_i=z_i+r_a h/2\cdot e^{i\{\arg(z_{i+1}-z_{i-1})-\pi/2\}}$$
$$h=|z_{i+1}-z_i|+|z_i-z_{i-1}|$$

で配置する．計算結果の E_F，E_M はそれぞれ $F(z)$，$|F(z)|$ の誤差の評価値である．２重連結領域の場合には，$N_1=N_2=N/2$，$C_1=C$ で C_2 は C を半分に縮小したものである．

例１　C: $x^2/5^2+y^2=1$

			偏角		長さ		離心角	
(1) E_M r_a	N=64		1.6E-8	8	4.9E-6	4	2.6E-5	2
(2) E_F r_a		個別	1.8E-2	1/2	7.4E-3	1/2	1.1E-3	1
	N=64	統一	1.8E-2	1/2	1.5E-3	1/2	5.4E-5	1
(3) E_M r_a		個別	6.1E-3	1/2	4.2E-3	1	7.8E-4	1
	N=128	統一	6.1E-3	1/2	2.8E-3	1/2	2.1E-4	1

例２　C: $x^2/5^2+(y-y_0)^2=1$

長さ　N=64　$r_a=1/2$

	y_0	1/2	3/4	7/8	15/16
(2) E_F	個別	2.3E-2	3.2E-2	5.8E-2	3.9E-1

その他の領域と拘束点配置の場合にも，統一的な方法の計算精度は常に個別的な方法の計算精度と同等またはそれ以上であり，後者が前者を上回ることはなかった．また，一般に原点を境界に近づけるに従って後者の計算精度は低下する．

４．結論

このような数値等角写像では，計算手順の統一性，数学的表現の整合性，計算精度の高さから，従来の個別的な方法ではなく，再定式化された統一的な方法を使用すべきである．この結論は積分方程式法[2]に対しても有効であると考えられる．

参考文献

1)　天野　要：代用電荷法に基づく統一的な数値等角写像の方法，情報処理学会研究報告，91-NA-38-3，1991.

2)　天野　要，日野　究：数値等角写像における代用電荷法と積分方程式法の比較，情報処理学会論文誌，Vol.33，No.4，pp. 428-437，1992.