Vol. 41 No. 11 情報処理学会論文誌 Nov. 2000

論理プログラムの新しい完備化と論理式の置換に基づく計算手続きについて

秋葉澄孝† 佐藤泰介†† 元吉文男†

本論文では，Clark の完備化を包含する新しい完備化の概念を提案し，新しい完備化に基づいた完備化プログラムの 3 値論理による論理的帰結の健全性と完全性を備えた計算手続きを提示する．この手続きは確定節プログラムを拡張した新しい論理プログラム First-order Logic Program（FLP）に対して適用でき，FLP のゴールの解の計算結果を選言標準形で表現する．また，新しい完備化による完備化プログラムでは頭部と本体に同じアトムが現れるので，そのままプログラムを実行すると無限ループを引き起こすが，この無限ループを避けるための方法も提案する．

A Procedure Based on a New Completion of Logic Programs and Replacement of Formulae

Sumitaka Akiba,† Taisuke Sato†† and Fumio Motoyoshi†

In this paper, we present a new concept of completion which includes Clark's completion, and a procedure which calculates logical consequences of the completed programs soundly and completely in three-valued logic. The procedure can be applied to new logic programs called first-order logic programs (FLP's) which are extensions of definite programs, and can calculate solutions of goals of FLP's in disjunctive normal forms. Since the completed program contains the same atoms in the head and the body, an infinite loop occurs when it is executed. We also present a method for avoiding it.

1. はじめに

本論文では，Clark の完備化[1] を包含する新しい完備化の概念を提案し，新しい完備化に基づいた完備化プログラムの 3 値論理による論理的帰結の健全性と完全性を備えた計算手続きを提示する．この手続きは確定節プログラム[2] を包含する論理プログラムの新しいクラス First-order Logic Program（FLP）に対して適用でき，ゴールの解の計算結果を選言標準形（DNF）で表現する．

この計算手続きは次の 2 つの問題の解決に貢献する．

その 1 つは論理プログラムとその計算手続きの拡張である．論理プログラムとその計算手続きは，確定節プログラムと SLD–導出[2] に代表され，より多くのプログラムが計算できるように，現在でもその拡張が研究されている[3]．

FLP とは

$$\forall x(p(x) \leftarrow P^+)$$
$$\forall x(\neg p(x) \leftarrow P^-)$$

という形の論理式と Clark の等号公理[1] からなり，本体 P^+，P^- およびゴールには任意の一階論理式をとることができる論理プログラムである．本論文で提示する計算手続きは任意の FLP に適用できるので，後で述べる例 1 の FLP のような，既存のどの論理プログラムでもない FLP が計算できるようになる．したがって，論理プログラムとその計算手続きの拡張の問題の解決に貢献できる．

もう 1 つの問題はゴールの解の表現に関する問題である．否定を含むプログラムの計算手続きには，否定を表せる解の表現方法が必要である．プログラムやゴールに否定が現れると解が「a 以外」となる場合がありうるが，解を否定的な等式で表現できる計算手続きならば，$x \neq a$ と表示して停止することができる．ところが，解を肯定的な等式でしか表現できない計算手続きは，a 以外の解を $x = f(a), x = f(f(a)), \ldots$ というように次々と表示しなければならず，停止できない．

現在までに提案されている論理プログラムの多くの

† 電子技術総合研究所
Electrotechnical Laboratory
†† 東京工業大学
Tokyo Institute of Technology

計算手続きでは，解は肯定的な等式を表す代入の形で表現される．そのため「a 以外」という解を表現するのは困難であり，否定を表せる解の表現方法は十分に研究されているとはいえない．

DNF は等式の肯定と否定が混ざった式の標準形である．たとえば $x{\neq}a$ や $\exists y(x{=}f(y)) \wedge x{\neq}f(a)$ は DNF であり，DNF でゴールの解を表現すると多様な表現が可能である．

本論文で提示する計算手続きはゴールの解の計算結果を DNF で表現するので，ゴールの解の表現に関する問題の解決に貢献できる．

本論文の基本的なアイディアは，完備プログラムの計算方法を応用することである．

完備プログラムには論理式の置き換え手続きと DNF への変形手続きを組み合わせた計算手続きが存在する．これは 3 値論理の論理的帰結の健全性と完全性を備えた計算手続きであり，ゴールの解の計算結果を DNF で表現する．そこで，FLP を 2 値論理で同値な完備プログラムに変形できれば，この変形後に完備プログラムの計算手続きを適用することによって，FLP の論理的帰結を計算することができ，ゴールの解の計算結果を DNF で表現できる．

本論文で提案する新しい完備化の概念は，このアイディアを実現するためのものであり，この概念による FLP の完備化は元の FLP と 2 値論理で同値である．

なお，論理プログラムの計算手続きは，真と判定されるすべての閉論理式は論理プログラムの論理的帰結でなければならないのはもちろんだが，どのような条件を満たす論理的帰結ならば真と判定されるか分かっていることが重要である．可能ならば真と判定される閉論理式の必要十分条件が分かっていることが望ましい．

本論文では，提示する計算手続きで閉論理式が真と判定される必要十分条件は，その閉論理式が FLP と 2 値論理で同値な完備プログラムの 3 値論理での論理的帰結であることを示す．

以下では，2 章で記号と用語の説明を行い，3 章で本論文と関係が深い従来の研究について述べる．

その後，4 章で FLP を定義し，FLP に対する新しい完備化の概念を提示する．この概念による完備化プログラムは特定の形をしているので，3 値論理での論理的帰結が一致するように簡略化できる．4 章ではこの簡略化についても述べ，これらの完備化と簡略化に基づいた FLP の計算手続きを提案する．

5 章では，プログラムが特別な形の場合の考察と従来の研究との比較を行う．

2. 記号と用語の説明

t，**f**，**u** でそれぞれ真，偽，不明を意味する真理値を表す．また，同じ記号を用いて，真理値がつねに **t**，**f**，**u** であるアトムを表す．

解釈 M と M の領域への変数割当て V による論理式 ϕ の真理値を $M[\![\phi]\!]_V$ で表す．M が 2 値であるか 3 値であるかにかかわらず同じ記号を用いる．また，M と V によって項 a に割り当てられる M の領域の元を $a^{M,V}$ で表す．$V[d/x]$ で，変数 x に d を，x 以外の変数には V と同じ元を割り当てる変数割当てを表す．

なお，混乱するおそれがない場合には「解釈 M と変数割当て V」のように記述して，V が割り当てる領域を断わることを省略する．

論理式 $\phi \leftarrow \psi$ の真理値を，$M[\![\phi]\!]_V = \mathbf{t}$ または $M[\![\psi]\!]_V = \mathbf{f}$ のとき $M[\![\phi \leftarrow \psi]\!]_V = \mathbf{t}$，$M[\![\phi]\!]_V = \mathbf{f}$ かつ $M[\![\psi]\!]_V = \mathbf{t}$ のとき $M[\![\phi \leftarrow \psi]\!]_V = \mathbf{f}$，その他のとき $M[\![\phi \leftarrow \psi]\!]_V = \mathbf{u}$ と定義する．また，$\exists x\phi$ の真理値を，ある $d \in D$ において $M[\![\phi]\!]_{V[d/x]} = \mathbf{t}$ のとき $M[\![\exists x\phi]\!]_V = \mathbf{t}$，任意の $d \in D$ において $M[\![\phi]\!]_{V[d/x]} = \mathbf{f}$ のとき $M[\![\exists x\phi]\!]_V = \mathbf{f}$，その他のとき $M[\![\exists x\phi]\!]_V = \mathbf{u}$ と定義する．ただし，D は M の領域を表す．

$\neg\phi$，$\phi{\vee}\psi$，$\phi{\wedge}\psi$，$\forall x\phi$ の真理値を，それぞれ $\mathbf{f} \leftarrow \phi$，$\phi \leftarrow \neg\psi$，$\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$，$\neg\exists x\neg\phi$ の真理値と一致するように定義する．

$\phi \leftrightarrow \psi$ を $(\phi \leftarrow \psi) \wedge (\psi \leftarrow \phi)$ の省略と定義する．

論理式の結合記号 $\Leftrightarrow$ を，真理値が $M[\![\phi]\!]_V = M[\![\psi]\!]_V$ のとき $M[\![\phi \Leftrightarrow \psi]\!]_V = \mathbf{t}$，その他のとき $M[\![\phi \Leftrightarrow \psi]\!]_V = \mathbf{f}$ となる記号と定義する．この $\Leftrightarrow$ は後述する述語定義で主に使用し，特に断らない論理式には現れないと仮定する．2 値の解釈では $\Leftrightarrow$ と $\leftrightarrow$ の真理値は一致する．

2 値論理での論理的帰結を $\models$ で表し，3 値論理での論理的帰結を $\models_3$ で表す．

ϕ と ψ が論理式，Δ が閉論理式の集合のとき，$\phi \equiv_\Delta \psi$ を，Δ の任意の 2 値モデル M と任意の変数割当て V において $M[\![\phi]\!]_V = M[\![\psi]\!]_V$ が成り立つことと定義し，この関係が成り立つとき ϕ と ψ は Δ の下で同値と呼ぶ．3 値論理での同様の関係を $\equiv_{3\Delta}$ で表す．Δ が空集合のときには，$\equiv$，$\equiv_3$ を用いる．

2 値の解釈は真理値が **u** にはならない 3 値の解釈でもあるので，2 値論理と 3 値論理の間には「ϕ が 2 値論理で充足可能ならば 3 値論理でも充足可能」，「$\Delta \models_3 \phi$ ならば $\Delta \models \phi$」などの関係が成り立つ．

本論文では，**t**，**f**，**u** 以外のボールド体で書かれた文字は「ベクトル」として複数の同様な文字の並びを表すことにする．たとえば $\boldsymbol{p}$ は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のことを表す．**t**，**f**，**u** のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{u}$ で表す．

ベクトルに関する関係は，対応する要素どうしの関係を意味するものとする．たとえば，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ は等式のベクトル $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ を意味する．論理式のベクトルに対する結合記号の意味も同様である．たとえば，$\boldsymbol{\phi} \wedge \boldsymbol{\psi}$ は論理式のベクトル $\phi_1 \wedge \psi_1, \ldots, \phi_n \wedge \psi_n$ を表す．論理式中に現れる $\boldsymbol{a}{=}\boldsymbol{b}$ は $a_1{=}b_1 \wedge \cdots \wedge a_n{=}b_n$ を表す．

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a})$ はアトム $p_1(\boldsymbol{a}), \ldots, p_n(\boldsymbol{a})$ のベクトルを表し，$p_i(\boldsymbol{a})$ は $p_i(a_1, \ldots, a_{m_i})$ を表す．ただし，$\boldsymbol{a}$ は項 $a_1, \ldots, a_m$ のベクトル，$\boldsymbol{p}$ は述語記号 $p_1, \ldots, p_n$ のベクトル，m_i は p_i の引数の個数であり，$m_i \leq m$ が成り立つと仮定する．

表現 $\{a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n\}$ で代入を表す．$\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ はこれのベクトル表現である．s が項のとき $s\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ で s に現れる変数 x_i を項 a_i で置き換えた項を表す．ϕ が論理式のとき $\phi\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ で ϕ に現れる自由変数 x_i を a_i で置き換えた論理式を表す．ただし，a_i の変数が $\phi\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ の中で束縛されないように，ϕ の束縛変数を付け替える操作を同時に行う．

論理式中の束縛変数を新しい束縛が起きないように付け替えた論理式を同一視して扱う．たとえば，$\exists x P(x, y) = \exists z P(z, y)$ である．

論理式中に現れる部分論理式で，先頭からその部分論理式にたどりつくまでに偶数回の否定記号を通るものを正に現れていると呼び，奇数回の否定記号を通るものを負に現れていると呼ぶ．なお，結合記号 $\leftarrow$ を右辺の論理式に対して否定記号 1 個分に数える．

表現 $\{\phi_1/p_1, \ldots, \phi_n/p_n;\ \ \psi_1/p_1, \ldots, \psi_n/p_n \,|\, \boldsymbol{x}\}$ で，論理式中に正に現れる部分アトム $p_i(\boldsymbol{a})$ を論理式 $\phi_i\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ で置き換え，負に現れる部分アトム $p_i(\boldsymbol{a})$ を論理式 $\psi_i\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ で置き換える操作を表す．ただし，$\boldsymbol{a}$ の変数が $\phi_i\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$，$\psi_i\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ の中で束縛されないように，ϕ_i，ψ_i に現れる束縛変数を付け替える操作も同時に行うことを表す．また，$p_1, \ldots, p_n$ は等号以外の述語で，互いに他と異なると仮定する．さらに，各 p_i の引数の個数を m_i，$\boldsymbol{x}$ の要素の個数を m とおくと，$m_i \leq m$ が成り立つと仮定し，ϕ_i，ψ_i の自由変数は $p_i(\boldsymbol{x})\ (= p_i(x_1, \ldots, x_{m_i}))$ にも現れると仮定する．

この操作を述語の置換と呼ぶ．$\{\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{\psi}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ はこれのベクトル表現である．正負の操作が同じときには，$\{\phi_1/p_1, \ldots, \phi_n/p_n \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\{\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ と略記する．また，$\{\boldsymbol{f}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\{\boldsymbol{t}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{f}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ をそれぞれ $\{\boldsymbol{f}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p}\}$，$\{\boldsymbol{t}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{f}/\boldsymbol{p}\}$，$\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$ と略記する．

論理式 G に述語の置換 Θ を適用することを G を Θ で展開すると呼び，その結果を $G\Theta$ で表す．

$E(\Sigma)$ で Clark の等号公理（Clark's Equational Theory）[1),4)] を表す．ただし，関数記号が有限個のときは Weak Domain Closure Axiom [2),4)] と呼ばれる論理式

$$\forall x\Big(\bigvee_{f \in \Sigma} \exists \boldsymbol{y}(x{=}f(\boldsymbol{y}))\Big)$$

を Clark の等号公理に加えたものを $E(\Sigma)$ で表す．Σ は関数記号の全体を表し，定数記号は引数がない関数記号として扱う．等号の解釈は 2 値とする．

$\forall \boldsymbol{x}(p(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow P)$ の形の論理式であり，P に現れる自由変数はすべて $p(\boldsymbol{x})\ (= p(x_i, \ldots, x_m))$ にも現れるものを $p(\boldsymbol{x})$ の述語定義と呼ぶ．述語定義のベクトル $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ と $E(\Sigma)$ からなる論理式の集合を完備プログラムと呼ぶ．

述語として等号のみを含む次の形の論理式

$$\bigvee_i \Big(\exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{s}_i[\boldsymbol{y}]) \bigwedge_j \neg\exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{s}_{ij}[\boldsymbol{y}])\Big)$$

を選言標準形（DNF）と呼ぶ．ϕ が述語として等号のみを含む論理式のとき，ϕ と $E(\Sigma)$ の下で同値な DNF を $DNF(\phi)$ で表す．

3. 補題および従来の研究

3.1 補　　題

本論文では，以下の補題を用いる．証明は付録で述べる．

補題 1　E を論理式とし，$\boldsymbol{\phi}$，$\boldsymbol{\psi}$ を論理式のベクトルとする．$\Theta = \{\boldsymbol{F}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ を述語の置換とし，$\overline{\Theta} = \{\boldsymbol{G}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ とおく．このとき，

$$E\{\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{\psi}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}\Theta = E\{\boldsymbol{\phi}\Theta/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{\psi}\overline{\Theta}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$$

が成り立つ．□

補題 2　$\boldsymbol{F}^+$，$\boldsymbol{F}^-$，$\boldsymbol{G}^+$，$\boldsymbol{G}^-$ を論理式のベクトル，Δ を閉論理式の集合とする．

任意の述語の置換 Ω において $\boldsymbol{F}^+\Omega \equiv_{3\Delta} \boldsymbol{G}^+\Omega$ と $\boldsymbol{F}^-\Omega \equiv_{3\Delta} \boldsymbol{G}^-\Omega$ が成り立つならば，任意の論理式 ϕ と任意の $n \geq 0$ において

$$\phi\{\boldsymbol{F}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$
$$\equiv_{3\Delta} \phi\{\boldsymbol{G}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

が成り立つ．□

補題 3　G を任意の論理式とする．

論理式 $G^{\mathbf{u}}$ を，G の部分論理式を **u** に置き換えた

論理式と仮定する．

また，論理式 $G^{\mathbf{ft}}$ を，G の正に現れる部分論理式を $\mathbf{f}$ に，負に現れる部分論理式を $\mathbf{t}$ に置き換えたものと仮定し，論理式 $G^{\mathbf{tf}}$ を，G の正に現れる部分論理式を $\mathbf{t}$ に，負に現れる部分論理式を $\mathbf{f}$ に置き換えたものと仮定する．

これらの置き換えは複数の部分論理式に対して行われていてもよく，まったく置き換えていなくてもよい．G には初めから $\mathbf{t}$，$\mathbf{f}$，$\mathbf{u}$ が現れていてもよい．

M，V を任意の解釈と変数割当てとすると，

$$\begin{aligned}
&M[\![G^{\mathbf{u}}]\!]_V = \mathbf{t} \quad \text{ならば} \quad M[\![G]\!]_V = \mathbf{t}\\
&M[\![G^{\mathbf{u}}]\!]_V = \mathbf{f} \quad \text{ならば} \quad M[\![G]\!]_V = \mathbf{f}\\
&M[\![G^{\mathbf{ft}}]\!]_V = \mathbf{t} \quad \text{ならば} \quad M[\![G]\!]_V = \mathbf{t}\\
&M[\![G^{\mathbf{ft}}]\!]_V = \mathbf{u} \quad \text{ならば} \quad M[\![G]\!]_V \neq \mathbf{f}\\
&M[\![G^{\mathbf{tf}}]\!]_V = \mathbf{f} \quad \text{ならば} \quad M[\![G]\!]_V = \mathbf{f}\\
&M[\![G^{\mathbf{tf}}]\!]_V = \mathbf{u} \quad \text{ならば} \quad M[\![G]\!]_V \neq \mathbf{t}
\end{aligned}$$

が成り立つ[5]． □

3.2 Clark の完備化

論理プログラムが $p(\boldsymbol{x})$ の肯定条件を表現する

$$\forall \boldsymbol{y}_j (p(\boldsymbol{a}_j) \leftarrow F_j)$$

という形の論理式の集合で表されている場合には，

$$\forall \boldsymbol{x}\Big(p(\boldsymbol{x}) \leftarrow \bigvee_j \exists \boldsymbol{y}_j (\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{a}_j \wedge F_j)\Big) \qquad (1)$$

と $E(\Sigma)$ からなる等価なプログラムに変形できる．Clark はこれをふまえて，F_j がリテラルの連言の場合に

$$\forall \boldsymbol{x}\Big(p(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \bigvee_j \exists \boldsymbol{y}_j (\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{a}_j \wedge F_j)\Big) \qquad (2)$$

と $E(\Sigma)$ からなるプログラムを初めのプログラムの完備化と呼んだ[1]．

しかし，F_j が任意の論理式でも同様な論理プログラムを考えることができる[2]．また，式 (1) と (2) もこの形の論理式に限る必要はなく，P を任意の論理式と仮定して，

$$\forall \boldsymbol{x}(p(\boldsymbol{x}) \leftarrow P) \qquad (3)$$

に対して

$$\forall \boldsymbol{x}(p(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow P) \qquad (4)$$

を考えることもできる．

定義 1（Clark の完備化） 式 (4) を式 (3) の Clark の完備化と呼ぶ．また，式 (4) と $E(\Sigma)$ からなるプログラムを式 (3) と $E(\Sigma)$ からなるプログラムの Clark の完備化と呼ぶ． □

3.3 Clark の等号公理 $E(\Sigma)$

$E(\Sigma)$ に関して，その完全性が証明されている[6),7)]．

定理 1 $E(\Sigma)$ は完全である．

すなわち，ϕ を述語として等号のみを含む任意の閉論理式とすると，

$$E(\Sigma) \models \phi \quad \text{または} \quad E(\Sigma) \models \neg\phi$$

のどちらかが成り立つ．

証明：

この定理は文献 7) の命題 3.1 である． □

述語として等号のみを含む論理式 ϕ に対して，これを $DNF(\phi)$ に変形する手続きが存在する[7]．

ϕ を閉論理式とすると，ϕ はこの手続きで $\mathbf{t}$ か $\mathbf{f}$ に変形され，

$$\begin{aligned}
&E(\Sigma) \models \phi \quad \Longleftrightarrow \; DNF(\phi) = \mathbf{t}\\
&E(\Sigma) \models \neg\phi \; \Longleftrightarrow \; DNF(\phi) = \mathbf{f}
\end{aligned}$$

なので，どちらになるかで ϕ の $E(\Sigma)$ の下での真偽を判定できる．

論理式 ϕ が自由変数 $\boldsymbol{x}$ を含む場合には，$DNF(\phi)$ は $E(\Sigma) \models \phi$ が成り立つ $\boldsymbol{x}$ を表現する．すなわち，この手続きで $E(\Sigma) \models \phi$ の解を計算することができ，計算結果は DNF の形で表現される．

3.4 Kunen の定理と ALL

完備プログラムに関する次の重要な定理が知られている[2),4),6)]．

定理 2（Kunen[6)]） G を任意の閉論理式とする．次の 2 つは同値である．

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models_3 G \qquad (5)$$

$$\exists n \text{ s.t. } E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \qquad (6)$$

また，これらが成り立つならば

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models G \qquad (7)$$

が成り立つ．

証明：

この定理は文献 6) の定理 6.3 である． □

この定理において，(7)⇒(5) は成り立たない．ただし，述語定義 $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ が call-consistent[8)] であり，かつ，G に対して厳密（strict w.r.t. G）[8)] ならば (7)⇒(5) が成り立つことが分かっている[8)]．

完備プログラムの処理系 ALL はこの定理を応用している[9),10)]．

ALL は，述語定義 $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ とゴールである閉論理式 G が与えられると，n を徐々に増やしながら G を展開し，各 n で

$$E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \qquad (8)$$

が成り立つかどうか調べる．ある n で式 (8) が成り立つことが分かると，式 (6) が成り立つので，G は $E(\Sigma) \cup \{\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})\}$ の論理的帰結であると判定して，ALL は停止する．式 (8) が成り立たないと分かれば，n を増やして式 (8) の検査を繰り返す．

ALL では式 (8) の判定を

$$E(\Sigma) \models G\{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{f}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p}\} \qquad (9)$$

を経由して行う．

式 (8) と (9) は同値である[5)]．これは補題 3 を用いて証明できる．また，式 (9) の右辺は述語として等号のみを含む論理式と 2 値論理で同値なので，前述した DNF に変形する手続きを適用すると以下の結果を得ることができる．

G が閉論理式の場合には，式 (9) の右辺は $\mathbf{t}$ か $\mathbf{f}$ のどちらかに変形されるので，式 (8) が成り立つかどうかは必ず判定できる．つまり，式 (9) の右辺が $\mathbf{t}$ に変形された場合は式 (9) は真，ゆえに式 (8) が成り立つと判定でき，$\mathbf{f}$ に変形された場合は式 (9) は偽，ゆえに式 (8) が成り立たないと判定できる．

G が自由変数を含む場合には，式 (9) の右辺は変数を含む形に変形される．これは式 (9) の解の DNF 表現であり，式 (9) と (8) は同値だから，式 (8) の解の DNF 表現である．

ALL は n を徐々に増やしながら式 (8) の解を DNF の形で求めることによって，式 (5) の解を次々に求めることができる．

このように，ALL は述語の展開手続きと $E(\Sigma)$ の下での真偽判定手続きを組み合わせた計算手続きであり，Kunen の定理によって次の 2 つ

- 真と判定される閉論理式は完備プログラムの 2 値論理での論理的帰結である，
- 真と判定される閉論理式は完備プログラムの 3 値論理での論理的帰結であり，完備プログラムの 3 値論理での論理的帰結は必ず真と判定される，

が保証されている．また，$E(\Sigma)$ の下での真偽判定を DNF への変形手続きで行うので，

- 自由変数を含む論理式が完備プログラムの 3 値論理での論理的帰結となる解の計算結果を DNF で表現する，

という特徴を持つ．

4. First-order Logic Program の計算方法

4.1 First-order Logic Program

本論文では，次のように定義される論理プログラム FLP の計算手続きを提示する．

定義 2（First-order Logic Program） 次の形の論理式のベクトル

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^{+}) \tag{10}$$

$$\forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^{-}) \tag{11}$$

と $E(\Sigma)$ からなる論理式の集合を First-order Logic Program（FLP）と呼ぶ．ただし，$\boldsymbol{P}^{+}$ と $\boldsymbol{P}^{-}$ は $\Leftrightarrow$ が現れない論理式のベクトルと仮定する．また，P_i^{+}, P_i^{-} に現れる自由変数は，$p_i(\boldsymbol{x})$ $(= p_i(x_1, \ldots, x_{m_i}))$ にも現れると仮定する．

$\Leftrightarrow$ が現れない論理式を FLP のゴールと呼ぶ．「FLP の」ゴールであることを強調する必要がない場合は，単にゴールと呼ぶ． □

例 1 次の 6 つの論理式

$$\forall x \forall y (p(x, y)) \leftarrow x{=}a)$$
$$\forall x \forall y (\neg p(x, y) \leftarrow x{=}b \wedge y{=}c)$$
$$\forall x \forall y (q(x, y) \leftarrow x{=}b \wedge y{\neq}c)$$
$$\forall x \forall y (\neg q(x, y) \leftarrow x{=}d \wedge y{\neq}h(e))$$
$$\forall x (r(x) \leftarrow \forall y (p(x, y) \rightarrow q(x, y)))$$
$$\forall x (\neg r(x) \leftarrow \mathbf{f})$$

と $E(\Sigma)$ からなる論理式の集合を Π_1 とおき，

$$G = \forall x (q(x, y) \rightarrow (p(x, y) \vee x{\neq}d)) \vee r(x)$$

とおく．Π_1 は FLP であり，G は FLP のゴールである．また，$\Pi_1 \models G$ の解は「$x = b$」と「$y \neq h(e)$」である．

Π_1 は既存のどの論理プログラムでもないので，既存の論理プログラムの計算手続きで直接扱うことができない．G に関しては失敗による否定[1),11)] を導入して既存の論理プログラムの計算手続きで扱えるように変形する方法が提案されている[2),12)] が，直接扱える計算手続きは提案されていない．後で述べる 4.4 節の例 5 では，本論文で提示する計算手続きで $\Pi_1 \models G$ の解を計算でき，「$y \neq h(e)$」という否定の式で表される解を DNF で表現できることを示す．

また，失敗による否定を導入して Π_1 や G を既存の論理プログラムやそのゴールに変形する方法について，5.5 節で考察する． □

FLP は述語の肯定条件と否定条件を式 (10)，(11) の形で表す論理プログラムである．

$p_i(\boldsymbol{x})$ の肯定条件が

$$\forall \boldsymbol{y}(p_i(\boldsymbol{a}_{ij}) \leftarrow F_{ij})$$

という形の論理式の集合で表されている場合には，

$$\forall \boldsymbol{x}\Big(p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \bigvee_j \exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{a}_{ij} \wedge F_{ij})\Big)$$

の形で $p_i(\boldsymbol{x})$ の肯定条件を表すことができる．したがって，この場合も式 (10) の形で述語の肯定条件が与えられていると考えてよい．

また，$p_i(\boldsymbol{x})$ の肯定条件が与えられていない場合には，

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \mathbf{f})$$

が与えられていると考えてよい．

同様に，$p_i(\boldsymbol{x})$ の否定条件が

$$\forall \boldsymbol{y}(\neg p_i(\boldsymbol{a}_{ij}) \leftarrow F_{ij})$$

の形の論理式の集合で表されている場合には，式 (11) の形で与えられていると考えてよく，否定条件が与え

られていない場合には，

$\forall \boldsymbol{x}(\neg p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \mathbf{f})$

が与えられていると考えてよい．

また，$p_i(\boldsymbol{x})$ の必要十分条件が

$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow F_i)$

という形の論理式で表されていることもある．この場合には，$p_i(\boldsymbol{x})$ の条件が，式 (10) と (11) の形の 2 つの論理式

$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow F_i)$

$\forall \boldsymbol{x}(\neg p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \neg F_i)$

で与えられていると見なすことができる．

4.2 FLP の完備化

本節では FLP と 2 値論理で同値な完備プログラムを明らかにする．

補題 4 次の等式が成り立つ．

$$(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+) \wedge (\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-)$$
$$\equiv \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{P}^+ \vee \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\neg \boldsymbol{P}^- \vee \neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-)$$

証明：

2 値の解釈と変数割当てによる $p_i(\boldsymbol{x})$，P_i^+，P_i^- の真理値のとり方の組合せは，8 通りある．それらの真理値と補題の等式の部分論理式の真理値を表にまとめると，次のようになる．

	$p_i(\boldsymbol{x})$	**t**	**t**	**t**	**t**	**f**	**f**	**f**	**f**
	P_i^+	**t**	**t**	**f**	**f**	**t**	**t**	**f**	**f**
	P_i^-	**t**	**f**	**t**	**f**	**t**	**f**	**t**	**f**
	$\neg p_i(\boldsymbol{x})$	**f**	**f**	**f**	**f**	**t**	**t**	**t**	**t**
	$\neg P_i^-$	**f**	**t**	**f**	**t**	**f**	**t**	**f**	**t**
(a)	$p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow P_i^+$	**t**	**t**	**t**	**t**	**f**	**f**	**t**	**t**
(b)	$\neg p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow P_i^-$	**f**	**t**	**f**	**t**	**t**	**t**	**t**	**t**
(c)	(a) $\wedge$ (b)	**f**	**t**	**f**	**t**	**f**	**f**	**t**	**t**
(d)	$P_i^+ \vee p_i(\boldsymbol{x})$	**t**	**t**	**t**	**t**	**t**	**t**	**f**	**f**
(e)	$\neg P_i^- \vee \neg p_i(\boldsymbol{x})$	**f**	**t**	**f**	**t**	**t**	**t**	**t**	**t**
(f)	$P_i^+ \vee \neg P_i^-$	**t**	**t**	**f**	**t**	**t**	**t**	**f**	**t**
(g)	(d) $\wedge$ (e) $\wedge$ (f)	**f**	**t**	**f**	**t**	**t**	**t**	**f**	**f**
(h)	$p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow$ (g)	**f**	**t**	**f**	**t**	**f**	**f**	**t**	**t**

この表から，(c) と (h) の真理値は一致することが分かる．したがって，補題は成り立つ． □

系 1 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}^+ \vee \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\neg \boldsymbol{P}^- \vee \neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-)$ とおく．G を任意の閉論理式とする．次の 2 つの式は同値である．

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models G$

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models G$

証明：

補題 4 より明らか． □

定義 3（FLP の完備化） 系 1 の完備プログラムを系 1 の FLP の完備化と呼び，述語定義を FLP の述語の条件を表す 2 つの論理式の完備化と呼ぶ． □

5.4 節では，この完備化と Clark の完備化の違いを考察する．

例 2 例 1 の FLP を Π_1 とおく．

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y(p(x,y) \Leftrightarrow (x{=}a \vee p(x,y)) \\
&\quad \wedge (\neg(x{=}b \wedge y{=}c) \vee \neg p(x,y)) \\
&\quad \wedge (x{=}a \vee \neg(x{=}b \wedge y{=}c)) \\
&\forall x \forall y(q(x,y) \Leftrightarrow ((x{=}b \wedge y{\neq}c) \vee q(x,y)) \\
&\quad \wedge (\neg(x{=}d \wedge y{\neq}h(e)) \vee \neg q(x,y)) \\
&\quad \wedge ((x{=}b \wedge y{\neq}c) \vee \neg(x{=}d \wedge y{\neq}h(e)))) \\
&\forall x(r(x) \Leftrightarrow \forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \vee r(x)) \\
&\quad \wedge (\neg \mathbf{f} \vee \neg r(x)) \\
&\quad \wedge (\forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \vee \neg \mathbf{f})
\end{aligned}$$

と $E(\Sigma)$ からなる完備プログラムを Π_2 とおく．

Π_2 は Π_1 の完備化である． □

4.3 完備プログラムの簡略化

$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{P}^+ \vee \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\neg \boldsymbol{P}^- \vee \neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-))$ のように，述語定義の本体の中に頭部と同じアトムが現れる場合がある．このような述語定義を扱うと，このアトムが原因となって，計算手続きで同じ手続きが繰り返されると想像される．実際 ALL では，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ の展開が繰り返し行われる．

本節では，この $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ を $\mathbf{u}$，$\mathbf{t}$，$\mathbf{f}$ に置き換えられることを示す．

補題 5 $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ を任意の述語定義とする．

各 i に対して $P_i^{\mathbf{u}}$ を，P_i の中に現れるアトム $p_i(\boldsymbol{x})$ のいくつかを $\mathbf{u}$ に置き換えた論理式とする．この置き換えは P_i に現れるすべての $p_i(\boldsymbol{x})$ に対して行っていてもよく，まったく置き換えていなくてもよい．ただし，置き換えられる $p_i(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x}$ は P_i の中で束縛されていないと仮定する．

$P_1^{\mathbf{u}}, \ldots, P_m^{\mathbf{u}}$ のベクトルを $\boldsymbol{P}^{\mathbf{u}}$ とおく．

$P_i^{\mathbf{u}}$ の中で正に現れる $\mathbf{u}$ を $\mathbf{f}$ に，負に現れる $\mathbf{u}$ を $\mathbf{t}$ に置き換えた論理式を $P_i^{\mathbf{ft}}$ とおき，$P_i^{\mathbf{u}}$ の中で正に現れる $\mathbf{u}$ を $\mathbf{t}$ に，負に現れる $\mathbf{u}$ を $\mathbf{f}$ に置き換えた論理式を $P_i^{\mathbf{tf}}$ とおく．これらの置き換えも，すべての $\mathbf{u}$ に対して行っていてもよく，まったく置き換えていなくてもよい．

$P_1^{\mathbf{ft}}, \ldots, P_m^{\mathbf{ft}}$ のベクトルと $P_1^{\mathbf{tf}}, \ldots, P_m^{\mathbf{tf}}$ のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{P}^{\mathbf{ft}}$，$\boldsymbol{P}^{\mathbf{tf}}$ とおく．

G を任意の閉論理式とすると，以下の 5 つは同値である．

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models_3 G \tag{12}$$

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{\mathbf{u}}) \models_3 G \tag{13}$$

$$\exists n \text{ s.t. } E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \qquad (14)$$
$$\exists n \text{ s.t. } E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^{\mathbf{u}}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \qquad (15)$$
$$\exists n \text{ s.t. } E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^{\mathbf{ft}}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{P}^{\mathbf{tf}}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \qquad (16)$$

証明：

まず，(12)⇒(13) を示す．M を式 (13) の左辺の任意のモデルとし，変数割当て V を任意にとる．各 i において $M[\![p_i(\boldsymbol{x})]\!]_V = M[\![P_i^{\mathbf{u}}]\!]_V$ が成り立つ．

各 i において，$M[\![P_i^{\mathbf{u}}]\!]_V \neq \mathbf{u}$ ならば，補題 3 より，$M[\![P_i^{\mathbf{u}}]\!]_V = M[\![P_i]\!]_V$ が成り立ち，また $M[\![P_i^{\mathbf{u}}]\!]_V = \mathbf{u}$ ならば，$M[\![p_i(\boldsymbol{x})]\!]_V = \mathbf{u}$ なので，やはり $M[\![P_i^{\mathbf{u}}]\!]_V = M[\![P_i]\!]_V$ が成り立つ．つまり，任意の i において $M[\![p_i(\boldsymbol{x})]\!]_V = M[\![P_i]\!]_V$ が成り立つ．

V を任意にとったので，M は $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ のモデルである．ゆえに M は式 (12) の左辺のモデルだから，(12)⇒(13) が成り立つ．

また，(12)⇔(14) と (13)⇔(15) が成り立つことを Kunen の定理を用いて，(15)⇒(14) と (15)⇔(16) が成り立つことを補題 1，補題 3 を用いて証明できる．

ゆえに式 (12)，(13)，(14)，(15) および (16) は同値である．□

定義 4（完備プログラムの簡略化）

補題 5 の $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{\mathbf{u}})$ を $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ の簡略化と呼び，$E(\Sigma) \cup \{\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{\mathbf{u}})\}$ を $E(\Sigma) \cup \{\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})\}$ の簡略化と呼ぶ．□

例 3　例 2 の完備プログラムを Π_2 とおく．

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y(p(x,y) \Leftrightarrow (x{=}a \vee \mathbf{u}) \\
&\qquad \wedge (\neg(x{=}b \wedge y{=}c) \vee \mathbf{u}) \\
&\qquad \wedge (x{=}a \vee \neg(x{=}b \wedge y{=}c)) \\
&\forall x \forall y(q(x,y) \Leftrightarrow ((x{=}b \wedge y{\neq}c) \vee \mathbf{u}) \\
&\qquad \wedge (\neg(x{=}d \wedge y{\neq}h(e)) \vee \mathbf{u}) \\
&\qquad \wedge ((x{=}b \wedge y{\neq}c) \vee \neg(x{=}d \wedge y{\neq}h(e)))) \\
&\forall x(r(x) \Leftrightarrow \forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \vee \mathbf{u}) \\
&\qquad \wedge (\neg \mathbf{f} \vee \mathbf{u}) \\
&\qquad \wedge (\forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \vee \neg \mathbf{f})
\end{aligned}$$

と $E(\Sigma)$ からなる完備プログラムは，Π_2 の簡略化である．□

4.4 First-order Logic Program の計算方法

前節までの結果より，次の定理が成り立つ．

定理 3　$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}^+ \vee \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\neg \boldsymbol{P}^- \vee \neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-)$，$\boldsymbol{P}^{\mathbf{u}} = ((\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^-) \vee \boldsymbol{u}) \wedge (\boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-)$ とおく．G を任意の閉論理式とする．次の 3 つは同値である．

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models_3 G$$
$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{\mathbf{u}}) \models_3 G$$
$$\exists n \text{ s.t. } E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

また，この 3 つが成り立つならば

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models G$$

が成り立つ．

証明：

Kunen の定理と，補題 4，補題 5 より明らか．□

この定理を応用して，ALL と同様な手続きをつくることができる．具体的には次の手続きが考えられる．ただし，$\Theta = \{\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}$ である．

FLP の計算手続き：

1. $n = 0$ とおく．
2. 2.1 から 2.5 を繰り返す．

2.1. $G_n = G\Theta^n$，$DNF_n = DNF(G\Theta^n\{\boldsymbol{f}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p}\})$ を計算する．

2.2. $DNF_n = \mathbf{t}$ の場合，G は FLP の論理的帰結であると表示して手続きを終了する．

2.3. $DNF_n \neq \mathbf{t}, \neq \mathbf{f}$，すなわち DNF_n が自由変数を含む場合，DNF_n を表示する．

2.4. G_n が $\boldsymbol{p}$ を含む場合，n を 1 つ増やして，2.1 へ戻る．

2.5. G_n が $\boldsymbol{p}$ を含まない場合，手続きを終了する．□

補題 3 より，次の 2 つ

$$E(\Sigma) \models_3 G\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$
$$DNF(G\Theta^n\{\boldsymbol{f}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p}\}) = \mathbf{t}$$

は同値なので，定理 3 は上の手続きに関して次の 2 つを保証する．

- 真と判定される閉論理式は FLP の 2 値論理での論理的帰結である．

  すなわち，上の手続きは FLP の 2 値論理の論理的帰結の健全性を備えた計算手続きである．

- 真と判定される閉論理式は FLP の完備化の 3 値論理での論理的帰結であり，FLP の完備化の 3 値論理での論理的帰結は必ず真と判定される．

  すなわち，上の手続きは FLP の完備化の 3 値論理の論理的帰結の健全性と完全性を備えた計算手続きである．

また，この手続きは

- 自由変数を含む論理式が FLP の完備化の 3 値論理での論理的帰結となる解の計算結果を DNF で表現する，

という特徴を持つ．

なお，ある n で G_n が $\boldsymbol{p}$ を含まない場合は，n を増やしても G_n は変わらず DNF_n も変化しない．したがって，n を増やして G_n と DNF_n を計算する必要がないので，上の手続きでは 2.5 のところで終了す

るようになっている．

定義 5（FLP に対応する述語の置換）

$\{\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ を FLP

$$E(\Sigma) \cup \{\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-)\}$$

に対応する述語の置換と呼ぶ． □

$\Theta = \{\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\Theta'$ を述語の置換とし，任意の閉論理式 G と $n \geq 0$ において

$$G\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \equiv_{3\,E(\Sigma)} G\Theta'^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \quad (17)$$

が成り立つならば，Θ を Θ' に置き換えても定理 3 は成り立つ．つまり，上で提示した FLP の計算手続きで Θ の代わりに Θ' を使用できる．

特に，論理式のベクトル $\boldsymbol{Q}^+$，$\boldsymbol{Q}^-$ が，任意の論理式の置換 Ω において

$$(\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^-)\Omega \equiv_{3\,E(\Sigma)} \boldsymbol{Q}^+\Omega$$
$$(\boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-)\Omega \equiv_{3\,E(\Sigma)} \boldsymbol{Q}^-\Omega$$

が成り立つものならば，補題 2 より式 (17) が成り立つことが分かるので，$\Theta' = \{\boldsymbol{Q}^+/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{Q}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ を Θ の代わりに使用できる．

$\boldsymbol{Q}^+$，$\boldsymbol{Q}^-$ が $\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^-$，$\boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-$ よりも簡単な論理式ならば，この Θ' を使用した方が G の展開が簡単で都合がよい．

例 4 例 1 の FLP を Π_1 とおく．

$$\begin{aligned}\Theta = \{\ & x{=}a \wedge \neg(x{=}b \wedge y{=}c)/p,\\ & (x{=}b \wedge y{\neq}c) \wedge \neg(x{=}d \wedge y{\neq}h(e))/q,\\ & \forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \wedge \neg \mathbf{f}/r;\\ & x{=}a \vee \neg(x{=}b \wedge y{=}c)/p,\\ & (x{=}b \wedge y{\neq}c) \vee \neg(x{=}d \wedge y{\neq}h(e))/q,\\ & \forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \vee \neg \mathbf{f}/r \mid x, y\}\end{aligned}$$

は Π_1 に対応する述語の置換である．

Ω を述語の置換とすると，

$$(x{=}a \wedge \neg(x{=}b \wedge y{=}c))\Omega \equiv_{3\,E(\Sigma)} (x{=}a)\Omega$$
$$((x{=}b \wedge y{\neq}c) \wedge \neg(x{=}d \wedge y{\neq}h(e)))\Omega$$
$$\equiv_{3\,E(\Sigma)} (x{=}b \wedge y{\neq}c)\Omega$$
$$(\forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \wedge \neg \mathbf{f})\Omega$$
$$\equiv_{3\,E(\Sigma)} (\forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y)))\Omega$$
$$(x{=}a \vee \neg(x{=}b \wedge y{=}c))\Omega$$
$$\equiv_{3\,E(\Sigma)} (x{\neq}b \vee y{\neq}c)\Omega$$
$$((x{=}b \wedge y{\neq}c) \vee \neg(x{=}d \wedge y{\neq}h(e)))\Omega$$
$$\equiv_{3\,E(\Sigma)} (x{\neq}d \vee y{=}h(e))\Omega$$
$$(\forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \vee \neg \mathbf{f})\Omega \equiv_{3\,E(\Sigma)} \mathbf{t}\Omega$$

が成り立つので，Θ の代わりに

$$\begin{aligned}\Theta' = \{\ & x{=}a/p,\\ & x{=}b \wedge y{\neq}c/q,\\ & \forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y))/r;\\ & x{\neq}b \vee y{\neq}c/p,\\ & x{\neq}d \vee y{=}h(e)/q,\\ & \mathbf{t}/r \mid x, y\}\end{aligned}$$

を使用できる． □

例 5 例 1 の FLP とゴールをそれぞれ Π_1，G とおく．

例 1 で述べたとおり，Π_1 と G は既存の論理プログラムの計算手続きでは直接扱えないプログラムとゴールである．ここでは，本節の手続きはこのような論理プログラムとゴールでも解を計算でき，「$y \neq h(e)$」という否定的な等式で表される解を DNF で表現できることを示す．

例 4 の 2 番目の述語の置換 Θ' を Θ とおく．本節の手続きは G_n と DNF_n を $n = 0$ から順に計算してゆく．$G_n\{\boldsymbol{f}/\boldsymbol{p}; \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p}\}$ を $G_n^{\mathbf{ft}}$ で表すことにして実際に計算してみると，

$$\begin{aligned}G_0 &= \forall x(q(x,y) \rightarrow (p(x,y) \vee x{\neq}d)) \vee r(x)\\ G_0^{\mathbf{ft}} &= \forall x(\mathbf{t} \rightarrow (\mathbf{f} \vee x{\neq}d)) \vee \mathbf{f}\\ DNF_0 &= \mathbf{f}\\ G_1 &= \forall x((x{\neq}d \vee y{=}h(e)) \rightarrow (x{=}a \vee x{\neq}d))\\ &\quad \vee \forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y))\\ G_1^{\mathbf{ft}} &= \forall x((x{\neq}d \vee y{=}h(e)) \rightarrow (x{=}a \vee x{\neq}d))\\ &\quad \vee \forall y(\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{f})\\ DNF_1 &= (y{\neq}h(e))\\ G_2 &= \forall x((x{\neq}d \vee y{=}h(e)) \rightarrow (x{=}a \vee x{\neq}d))\\ &\quad \vee \forall y((x{\neq}b \vee y{\neq}c) \rightarrow (x{=}b \wedge y{\neq}c))\\ G_2^{\mathbf{ft}} &= \forall x((x{\neq}d \vee y{=}h(e)) \rightarrow (x{=}a \vee x{\neq}d))\\ &\quad \vee \forall y((x{\neq}b \vee y{\neq}c) \rightarrow (x{=}b \wedge y{\neq}c))\\ DNF_2 &= (y{\neq}h(e) \vee x{=}b)\end{aligned}$$

である．ゆえに，本節の手続きは $n = 1$ のとき $y{\neq}h(e)$ と表示し，$n = 2$ のとき $y{\neq}h(e) \vee x{=}b$ と表示する．この 2 番目の DNF は「$y \neq h(e)$」と「$x = b$」は $\Pi_1 \models G$ の解であることを表現している．

そして，G_2 には等号以外の述語が含まれないので，この手続きは $n = 2$ まで計算して終了する． □

5. 特別な場合の考察と他の研究との比較

以上の議論では $\boldsymbol{P}^+$ と $\boldsymbol{P}^-$ を任意の論理式と仮定してきた．本章では，これらが特別な形の論理式の場合について考察する．また，Clark の完備化と本論文の完備化の比較と，失敗による否定を導入して FLP を既存の論理プログラムに変形した場合の考察も行う．

なお，述語定義 $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ と $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}')$ が 3 値論理で $E(\Sigma)$ の下で同値であり，G が閉論理式のとき，次の 2 式

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models_3 G$$
$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}') \models_3 G$$

は同値である．つまり，完備プログラムの 3 値論理

の論理的帰結について議論する場合には，述語定義を $E(\Sigma)$ の下で 3 値論理で同値変形してもよく，簡単な形の述語定義に変形しておくと議論しやすくなる．

以下では，このような変形を適宜行う．

5.1 $P_i^- = \mathbf{f}$ の場合

ある $p_i(\boldsymbol{x})$ に対して肯定条件

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow P_i^+)$$

しか与えられていない場合がある．この場合には $P_i^- = \mathbf{f}$ である否定条件

$$\forall \boldsymbol{x}(\neg p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \mathbf{f})$$

が与えられていると見なすことができる．したがって，完備化された $p_i(\boldsymbol{x})$ の述語定義は

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (P_i^+ \vee p_i(\boldsymbol{x})) \wedge (\neg\mathbf{f} \vee \neg p_i(\boldsymbol{x})) \wedge (P_i^+ \vee \neg\neg\mathbf{f}))$$

である．これは 3 値論理で

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow P_i^+ \vee p_i(\boldsymbol{x}))$$

と同値であり，この同値な述語定義の簡略化は

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow P_i^+ \vee \mathbf{u})$$

である．

また，任意の述語の置換 Ω において

$$(P_i^+ \wedge \neg P_i^-)\Omega = (P_i^+ \wedge \neg\mathbf{f})\Omega \equiv_3 P_i^+\Omega$$
$$(P_i^+ \vee \neg P_i^-)\Omega = (P_i^+ \vee \neg\mathbf{f})\Omega \equiv_3 \mathbf{t}\Omega$$

なので，$P_i^- = \mathbf{f}$ である FLP に対応する述語の置換は，正負に現れる p_i をそれぞれ P_i^+ および $\mathbf{t}$ に置き換えるものになる．

特にどの $p_i(\boldsymbol{x})$ に対しても肯定条件しか与えられていない場合には，つまり $\boldsymbol{P}^- = \boldsymbol{f}$ の場合には，G を任意の閉論理式とすると，次の 3 つは同値である．

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^+ \vee \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \models_3 G$$
$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^+ \vee \mathbf{u}) \models_3 G$$
$$\exists n \text{ s.t. } E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

また，この 3 つが成り立つならば次の式が成り立つ．

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+) \models G$$

この $\boldsymbol{P}^- = \boldsymbol{f}$ の場合のさらに特別な場合として，各 $p_i(\boldsymbol{x})$ の条件が確定節プログラムで表されている場合がある．

この場合の $G\{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n$ の計算は SLD–導出[2) と類似している．SLD–導出では深さ優先で導出するが，導出を幅優先で行うと $G\{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n$ の計算とほぼ一致する．

あるいは，$G\{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$ の計算は G の SLD–木[2) を深さ n まで作ることに相当するといえる．

このような観点から，述語の置換による計算手続きは SLD–導出の拡張とみることができる．

なお，$P_i^+ = \mathbf{f}$ の場合には，完備化された $p_i(\boldsymbol{x})$ の述語定義は $\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \neg P_i^- \wedge p_i(\boldsymbol{x}))$，これの簡略化は $\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \neg P_i^- \wedge \mathbf{u})$ であり，$P_i^+ = \mathbf{f}$ である FLP に対応する述語の置換は正負に現れる p_i をそれぞれ $\mathbf{f}$ および $\neg P_i^-$ に置き換えるものになる．

5.2 $P_i^- = \neg P_i^+$ の場合

$p_i(\boldsymbol{x})$ の必要十分条件

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow P_i^+)$$

が与えられている場合がある．この場合は $P_i^- = \neg P_i^+$ である次の論理式が与えられていると考えてよい．

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow P_i^+)$$
$$\forall \boldsymbol{x}(\neg p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \neg P_i^+)$$

したがって，この場合の完備化は

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (P_i^+ \vee p_i(\boldsymbol{x})) \wedge (\neg\neg P_i^+ \vee \neg p_i(\boldsymbol{x})) \wedge (P_i^+ \vee \neg\neg P_i^+))$$

であり，これは次の述語定義と 3 値論理で同値である．

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow P_i^+)$$

また，$P_i^- = \neg P_i^+$ である FLP に対応する述語の置換は，p_i を正負の区別をせずに P_i^+ に置き換えるものになる．

特に，すべての $p_i(\boldsymbol{x})$ について必要十分条件が与えられている場合には，G を任意の閉論理式とすると，次の 2 つは同値である．

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^+) \models_3 G$$
$$\exists n \text{ s.t. } E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

また，この 2 つが成り立つならば次の式が成り立つ．

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow \boldsymbol{P}^+) \models G$$

これは Kunen の定理と同じことを表している．すなわち，定理 3 は Kunen の定理の拡張になっている．

5.3 P_i^+ と P_i^- が同時に成り立つ場合

たとえば $P_i^+ = P_i^- = \mathbf{t}$ の場合のように，P_i^+ と P_i^- が同時に成り立つ場合がある．この場合には，FLP

$$E(\Sigma) \cup \{\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-)\}$$

のモデルは存在しない．したがって，任意の閉論理式がこの FLP の論理的帰結である．

一方，FLP にモデルが存在しない場合でも，FLP の完備化には 3 値のモデルが存在し，本論文の手続きで真と判定されるのは FLP の完備化の 3 値論理での論理的帰結だけである．

なお，この場合でも定理 3 は成り立つ．

5.4 Clark の完備化との比較

述語の肯定条件を表す論理式

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+) \qquad (18)$$

と，これの Clark の完備化

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^+) \qquad (19)$$

は，2 値論理で同値ではない．

一方，式 (18) は 5.1 節の $\boldsymbol{P}^- = \mathbf{f}$ の場合に相当す

るので，式 (18) の本論文の完備化は

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{+} \vee \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))$$

であり，これは式 (18) と 2 値論理で同値である．

ところで，Clark の完備化は式 (18) に加えて

$$\forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \neg \boldsymbol{P}^{+}) \tag{20}$$

を仮定していると考えられる．そこで，Clark の完備化は式 (18) と (20) から決定されているという観点に立つことができる．これは，5.2 節で述べた $\boldsymbol{P}^{-} = \neg \boldsymbol{P}^{+}$ の場合に相当し，本論文の完備化は Clark の完備化と同じ論理式 (19) である．

このように，Clark の完備化 (19) を式 (18) と (20) の完備化と考えると，本論文の完備化は Clark の完備化の拡張になっている．

5.5 拡張論理プログラムへの変形

FLP は今までに提案されているどの論理プログラムのクラスにも含まれないので，FLP を直接計算する手続きは提案されていないと思われ，また，既存の論理プログラムに変形して間接的に計算する方法も明示的には提案されていないと思われる．

しかし，Lloyd が提案した Extended Program☆を General Program☆☆に変形する方法[2),12)] を参考にすると，FLP を拡張論理プログラム（Extended Logic Program, ELP）[3),13)] に変形して FLP を ELP の計算手続きで間接的に計算できると考えられる．

たとえば，Lloyd の方法を用いると，例 1 であげた

$$\forall x(r(x) \leftarrow \forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y))) \tag{21}$$

は，新しい述語 s を導入して

$$\forall x(r(x) \leftarrow not\, s(x))$$

$$\forall x \forall y(s(x) \leftarrow not\,(p(x,y) \rightarrow q(x,y))) \tag{22}$$

に変形される．ただし，not は失敗による否定（Negation as Failure, NAF）[1),11)] を表す．Lloyd の方法では，式 (22) はさらに

$$\forall x \forall y(s(x) \leftarrow p(x,y) \wedge not\, q(x,y))$$

に変形されるが，ELP では $\neg$ を使用できるので，

$$\forall x \forall y(s(x) \leftarrow not \neg p(x,y) \wedge not\, q(x,y))$$

に変形した方がより自然であると我々は判断する．これらはわずかに違うが，これらの本質的な点は式 (21) の $\forall y$ を除去するために新しい述語 s と not を導入することである．つまり，これらの変形の正当性を示すためには NAF を考慮しなければならない．また，これらを用いて $r(x)$ の解を計算するためには，$s(x)$ の解を計算する必要があり，これらの解の計算は NAF を考慮しなければならない．

☆ 文献 2) では Program と呼ばれている．

☆☆ 文献 2) では Normal Program と呼ばれている．

このように，FLP を ELP に変形すると，純論理的な FLP に純論理的には扱えない NAF を導入する必要があると考えられ，FLP を純論理的に扱うことが非常に困難になる．

本論文の計算手続きでは NAF を導入しないので，このような問題は発生せず，FLP を純論理的に扱うことができる．

6. おわりに

本論文では，述語の肯定条件と否定条件を表す論理プログラムである First-order Logic Program（FLP）に対して，2 値論理で同値な完備プログラムを明らかにした．また，述語定義の本体に頭部と同じアトムが現れる場合には，述語定義を簡略化できることを示した．さらに，これらを用いて，Kunen の定理の拡張である定理 3 を証明し，この定理に基づいた FLP の計算手続きを提示した．

この手続きは，述語の置換と Clark の等号公理の下での真偽判定を組み合わせた手続きであり，FLP の完備化の 3 値論理での論理的帰結を健全かつ完全に真と判定できることが定理 3 によって保証されていることを示した．また，任意のゴールの解の計算結果を DNF の形で表現できることを示した．

本論文の手続きでは，FLP の論理的帰結のうちの，FLP の完備化の 3 値論理による論理的帰結だけを計算できる．そのため，FLP の 2 値論理の論理的帰結をより多く計算できるようなゴールの展開について現在研究を進めている．また，DNF への変形手続きの改良や，述語を不均等に展開する手続きの開発など，手続きの効率を上げるための研究も進めており，これらの成果を採り入れて本論文で提案した手続きをインプリメントする予定である．

参 考 文 献

1) Clark, K.L.: Negation as Failure, *Logic and Data Bases*, Gallaire, H. and Minker, J. (Eds.), pp.293–322, Plenum Press, New York (1978).

2) LLoyd, J.W.: *Foundations of Logic Programming*, 2nd, extended edition, Springer-Verlag (1987).

3) Baral, C. and Gelfond, M.: Logic Programming and Knowledge Representation, *J. Logic Programming*, Vol.19/20, pp.73–148 (1994).

4) Shepherdson, J.C.: Negation in Logic Programming, *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*, Minker, J. (Ed.), pp.19–88, Morgan Kaufmann, Los Altos (1988).

5) Sato, T.: A First Order Unfold/Fold System, Technical Report TR-90-17, Electrotechnical Laboratory, Tsukuba (1990).
6) Kunen, K.: Negation in Logic Programming, *J. Logic Programming*, Vol.4, No.4, pp.289–308 (1987).
7) Sato, T.: Quantifier Elimination for Finite and Infinite Trees, Technical Report TR-89-25, Electrotechnical Laboratory, Tsukuba (1989).
8) Kunen, K.: Signed Data Dependencies in Logic Programs, *J. Logic Programming*, Vol.7, No.3, pp.231–245 (1989).
9) 元吉文男，佐藤泰介：拡張述語言語 ALL インタプリタの実現，コンピュータソフトウェア，Vol.8, No.5, pp.79–90 (1991).
10) Motoyoshi, F. and Sato, T.: Implementation of Augmented Logic Language (ALL), *Advances in Software Science and Technology*, Vol.5, pp.91–106 (1993).
11) Apt, K.R. and Bol, R.N.: Logic Programming and Negation: A Survey, *J. Logic Programming*, Vol.19/20, pp.9–71 (1994).
12) Lloyd, J.W. and Topor, R.W.: Making PROLOG More Expressive, *J. Logic Programming*, Vol.1, No.3, pp.225–240 (1984).
13) Gelfond, M. and Lifschitz, V.: Classical Negation in Logic Programs and Disjunctive Databases, *New Generation Computing*, Vol.9, pp.365–385 (1991).

付録 補題の証明

$f(\boldsymbol{a})$ を項，θ を代入とすると，定義より，

$$f(\boldsymbol{a})\theta = f(\boldsymbol{a}\theta)$$

が成り立つ．また，$p(\boldsymbol{a})$ をアトム，ϕ，ψ を論理式とし，θ を代入とすると，定義より，

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{a})\theta &= p(\boldsymbol{a}\theta) \\ (\neg\phi)\theta &= \neg(\phi\theta) \\ (\phi \vee \psi)\theta &= (\phi\theta) \vee (\psi\theta) \\ (\phi \wedge \psi)\theta &= (\phi\theta) \wedge (\psi\theta) \\ (\phi \leftarrow \psi)\theta &= (\phi\theta) \leftarrow (\psi\theta) \\ (\exists x\phi)\theta &= \exists x(\phi\theta) \\ (\forall x\phi)\theta &= \forall x(\phi\theta) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$\exists x(\phi\theta)$，$\forall x(\phi\theta)$ では，$\exists$，$\forall$ が θ の変数を束縛しないように，かつ，ϕ の自由変数 x を θ が置き換えないように，x が選ばれていると仮定する．

$\Theta = \{\boldsymbol{F}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ を述語の置換とし，$\overline{\Theta} = \{\boldsymbol{G}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ とおく．$p(\boldsymbol{a})$ をアトム，ϕ，ψ を論理式とする．定義より，

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{a})\Theta &= p(\boldsymbol{a}\Theta) \\ (\neg\phi)\Theta &= \neg(\phi\overline{\Theta}) \\ (\phi \vee \psi)\Theta &= (\phi\Theta) \vee (\psi\Theta) \\ (\phi \wedge \psi)\Theta &= (\phi\Theta) \wedge (\psi\Theta) \\ (\phi \leftarrow \psi)\Theta &= (\phi\Theta) \leftarrow (\psi\overline{\Theta}) \\ (\exists x\phi)\Theta &= \exists x(\phi\Theta) \\ (\forall x\phi)\Theta &= \forall x(\phi\Theta) \end{aligned}$$

が成り立つ．

以下では，これらの等式を適宜用いる．

A.1 補題 1 の証明

次の補題を用いて証明する．

補題 6 ϕ を論理式，$\Theta = \{\boldsymbol{F}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ を述語の置換，$\boldsymbol{a}$ を項のベクトルとする．このとき，

$$\phi\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}\Theta = (\phi\Theta)\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$$

が成り立つ．

証明：

$\theta = \{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ とおく．ϕ の構造に関して帰納的に証明する．

(i) $\phi = p_i(b_1, \ldots, b_m)$ の場合

$\boldsymbol{x}$ の初めの m 個の要素 $x_1, \ldots, x_m$ を $\boldsymbol{x}'$ とおき，$b_1, \ldots, b_m$ を $\boldsymbol{b}'$ とおく．

定義より，次の 2 式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \phi\theta\Theta &= p_i(\boldsymbol{b}'\theta)\Theta = F_i\{\boldsymbol{b}'\theta/\boldsymbol{x}'\} \\ \phi\Theta\theta &= F_i\{\boldsymbol{b}'/\boldsymbol{x}'\}\theta \end{aligned}$$

述語の置換の定義より，F_i には $\boldsymbol{x}'$ 以外の自由変数は現れない．すなわち，$F_i\{\boldsymbol{b}'/\boldsymbol{x}'\}$ の自由変数は $\boldsymbol{b}'$ の変数なので，

$$F_i\{\boldsymbol{b}'/\boldsymbol{x}'\}\theta = F_i\{\boldsymbol{b}'\theta/\boldsymbol{x}'\}$$

が成り立つ．ゆえに，補題は成り立つ．

(ii) $\phi = q$ であり，q は $\boldsymbol{p}$ 以外の述語を持つアトムの場合

q と $q\theta$ は Θ で置換されないので，

$$\phi\theta\Theta = q\theta\Theta = q\theta = q\Theta\theta = \phi\Theta\theta$$

ゆえに，補題は成り立つ．

以下では，$\overline{\Theta} = \{\boldsymbol{G}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ とおき，$\phi = \phi_1$，$\phi = \phi_2$ のときに次の 2 式が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned} \phi\theta\Theta &= \phi\Theta\theta \\ \phi\theta\overline{\Theta} &= \phi\overline{\Theta}\theta \end{aligned}$$

(iii) $\phi = \phi_1 \leftarrow \phi_2$ の場合

定義より，次の 2 式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \phi\theta\Theta &= ((\phi_1\theta) \leftarrow (\phi_2\theta))\Theta = (\phi_1\theta\Theta) \leftarrow (\phi_2\theta\overline{\Theta}) \\ \phi\Theta\theta &= ((\phi_1\Theta) \leftarrow (\phi_2\overline{\Theta}))\theta = (\phi_1\Theta\theta) \leftarrow (\phi_2\overline{\Theta}\theta) \end{aligned}$$

また，ϕ_1，ϕ_2 に関する仮定より

$$(\phi_1\theta\Theta) \leftarrow (\phi_2\theta\overline{\Theta}) = (\phi_1\Theta\theta) \leftarrow (\phi_2\overline{\Theta}\theta)$$

が成り立つ．ゆえに，補題は成り立つ．

(iv) $\phi = \neg\phi_1$ の場合

(v) $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ の場合

(vi) $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ の場合

これら 3 つの場合は (iii) と同様に証明できる．

(vii) $\phi = \exists y \phi_1$ の場合

y には，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{a}$，Θ に現れない変数が選ばれていると仮定してよいので，定義より，

$$\phi\theta\Theta = (\exists y(\phi_1\theta))\Theta = \exists y(\phi_1\theta\Theta)$$
$$\phi\Theta\theta = (\exists y(\phi_1\Theta))\theta = \exists y(\phi_1\Theta\theta)$$

が成り立つ．また，ϕ_1 に関する仮定より

$$\exists y(\phi_1\theta\Theta) = \exists y(\phi_1\Theta\theta)$$

が成り立つ．ゆえに，補題は成り立つ．

(viii) $\phi = \forall y \phi_1$ の場合

この場合は (vii) と同様に証明できる． □

補題 1 の証明：

$\Omega = \{\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{\psi}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\Omega' = \{\boldsymbol{\phi}\Theta/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{\psi}\overline{\Theta}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\overline{\Omega} = \{\boldsymbol{\psi}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\overline{\Omega'} = \{\boldsymbol{\psi}\overline{\Theta}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{\phi}\Theta/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ とおく．E の構造に関して帰納的に証明する．

(i) $E = p_i(\boldsymbol{a})$ の場合

述語の置換の定義より，

$$E\{\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{\psi}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}\Theta = \phi_i\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}\Theta$$
$$E\{\boldsymbol{\phi}\Theta/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{\psi}\overline{\Theta}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\} = \phi_i\Theta\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$$

が成り立つ．また，補題 6 より，

$$\phi_i\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}\Theta = \phi_i\Theta\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$$

が成り立つ．ゆえに，補題は成り立つ．

(ii) $E = q$ であり，q は $\boldsymbol{p}$ 以外の述語を持つアトムの場合

E は置換されないので，補題は成り立つ．

以下では，$E = E_1$，$E = E_2$ のときに

$$E\Omega\,\Theta = E\Omega'$$
$$E\overline{\Omega}\,\overline{\Theta} = E\overline{\Omega'}$$

が成り立つと仮定する．

(iii) $E = E_1 \leftarrow E_2$ の場合

述語の置換の定義より，

$$(E_1 \leftarrow E_2)\Omega\Theta = ((E_1\Omega) \leftarrow (E_2\overline{\Omega}))\Theta = ((E_1\Omega\,\Theta) \leftarrow (E_2\overline{\Omega}\,\overline{\Theta}))$$
$$(E_1 \leftarrow E_2)\Omega' = ((E_1\Omega') \leftarrow (E_2\overline{\Omega}'))$$

が成り立つ．また，E_1，E_2 に関する仮定より，

$$((E_1\Omega\,\Theta) \leftarrow (E_2\overline{\Omega}\,\overline{\Theta})) = ((E_1\Omega') \leftarrow (E_2\overline{\Omega'}))$$

が成り立つ．ゆえに，補題は成り立つ．

(iv) $E = \neg E_1$ の場合

(v) $E = E_1 \vee E_2$ の場合

(vi) $E = E_1 \wedge E_2$ の場合

これら 3 つの場合は (iii) と同様に証明できる．

(vii) $E = \exists x E_1$ の場合

述語の置換の定義より，

$$(\exists x E_1)\Omega\Theta = (\exists x(E_1\Omega))\Theta = \exists x(E_1\Omega\Theta)$$
$$(\exists x E_1)\Omega' = \exists x(E_1\Omega')$$

が成り立つ．また，E_1 に関する仮定より，

$$\exists x(E_1\Omega\Theta) = \exists x(E_1\Omega')$$

が成り立つ．ゆえに，補題は成り立つ．

(viii) $E = \forall x E_1$ の場合

この場合は (vii) と同様に証明できる． □

A.2 補題 2 の証明

次の補題を用いて証明する．

補題 7 Δ を閉論理式の集合とし，$\boldsymbol{F}^+$，$\boldsymbol{F}^-$，$\boldsymbol{G}^+$，$\boldsymbol{G}^-$ を

$$\boldsymbol{F}^+ \equiv_{3\Delta} \boldsymbol{G}^+ \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{F}^- \equiv_{3\Delta} \boldsymbol{G}^-$$

が成り立つ論理式のベクトルとする．このとき，任意の閉論理式 ϕ に対して

$$\phi\{\boldsymbol{F}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\} \equiv_{3\Delta} \phi\{\boldsymbol{G}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$$

が成り立つ．

証明：

$\Theta = \{\boldsymbol{F}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\Omega = \{\boldsymbol{G}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\overline{\Theta} = \{\boldsymbol{F}^-/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}^+/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\overline{\Omega} = \{\boldsymbol{G}^-/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}^+/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ とおく．M を Δ の任意の 3 値モデル，V を任意の変数割当てと仮定する．

ϕ の構造に関して帰納的に証明する．

(i) $\phi = p_i(\boldsymbol{a})$ のとき

$$\begin{aligned} M[\![\phi\Theta]\!]_V &= M[\![F_i^+\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}]\!]_V \\ &= M[\![F_i^+]\!]_{V[\boldsymbol{a}^{M,V}/\boldsymbol{x}]} = M[\![G_i^+]\!]_{V[\boldsymbol{a}^{M,V}/\boldsymbol{x}]} \\ &= M[\![G_i^+\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}]\!]_V = M[\![\phi\Omega]\!]_V \end{aligned}$$

なので，補題は成り立つ．

(ii) $\phi = q$ であり，q は $\boldsymbol{p}$ 以外の述語を持つアトムの場合

ϕ は Θ，Ω で置換されないので，

$$M[\![\phi\Theta]\!]_V = M[\![q]\!]_V = M[\![\phi\Omega]\!]_V$$

が成り立つ．ゆえに，補題は成り立つ．

以下では，$\phi = \phi_1$，$\phi = \phi_2$ のとき

$$\phi\Theta \equiv_{3\Delta} \phi\Omega$$
$$\phi\overline{\Theta} \equiv_{3\Delta} \phi\overline{\Omega}$$

が成り立つと仮定する．

(iii) $\phi = \phi_1 \leftarrow \phi_2$ の場合

$$\begin{aligned} & M[\![\phi\Theta]\!]_V = \mathbf{t} \iff M[\![(\phi_1\Theta) \leftarrow (\phi_2\overline{\Theta})]\!]_V = \mathbf{t} \\ & \iff M[\![\phi_1\Theta]\!]_V = \mathbf{t} \quad \text{または} \quad M[\![\phi_2\overline{\Theta}]\!]_V = \mathbf{f} \\ & \iff M[\![\phi_1\Omega]\!]_V = \mathbf{t} \quad \text{または} \quad M[\![\phi_2\overline{\Omega}]\!]_V = \mathbf{f} \\ & \iff M[\![(\phi_1\Omega) \leftarrow (\phi_2\overline{\Omega})]\!]_V = \mathbf{t} \\ & \iff M[\![\phi\Omega]\!]_V = \mathbf{t} \end{aligned}$$

であり，同様に

$$M[\![\phi\Theta]\!]_V = \mathbf{f} \iff M[\![\phi\Omega]\!]_V = \mathbf{f}$$

なので，補題は成り立つ．

(iv) $\phi = \neg\phi_1$ の場合

(v) $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ の場合

(vi) $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ の場合

これらの場合は (iii) と同様に証明できる．

(vii) $\phi = \exists x \phi_1$ の場合

M の領域を D とおく．

$$
\begin{aligned}
&M[\![\phi\Theta]\!]_V = \mathbf{t} \iff M[\![\exists x(\phi_1\Theta)]\!]_V = \mathbf{t} \\
&\iff \exists d \in D \text{ s.t. } M[\![\phi_1\Theta]\!]_{V[d/x]} = \mathbf{t} \\
&\iff \exists d \in D \text{ s.t. } M[\![\phi_1\Omega]\!]_{V[d/x]} = \mathbf{t} \\
&\iff M[\![\exists x(\phi_1\Omega)]\!]_V = \mathbf{t} \iff M[\![\phi\Omega]\!]_V = \mathbf{t}
\end{aligned}
$$

であり，同様に

$$M[\![\phi\Theta]\!]_V = \mathbf{f} \iff M[\![\phi\Omega]\!]_V = \mathbf{f}$$

なので，補題は成り立つ．

(viii) $\phi = \forall x \phi_1$ の場合

この場合は (vii) と同様に証明できる． □

補題 2 の証明：

$$
\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{F}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^m\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \\
&\{\boldsymbol{G}^+/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^m\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \\
&\{\boldsymbol{F}^-/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}^+/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^m\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \\
&\{\boldsymbol{G}^-/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}^+/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^m\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}
\end{aligned}
$$

をそれぞれ Ω_m，Ω'_m，$\overline{\Omega}_m$，$\overline{\Omega'}_m$ と略記する．

n に関して帰納的に証明する．

(i) $n = 0$ の場合

$$\phi\Omega_0 \equiv_{3\triangle} \phi\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \equiv_{3\triangle} \phi\Omega'_0$$

だから，補題は成り立つ．

(ii) $n = k$ の場合

任意の論理式 ψ に対して

$$
\begin{aligned}
&\psi\Omega_{k-1} \equiv_{3\triangle} \psi\Omega'_{k-1} \\
&\psi\overline{\Omega}_{k-1} \equiv_{3\triangle} \psi\overline{\Omega'}_{k-1}
\end{aligned}
$$

が成り立つことが，帰納的に証明されていると仮定する．

この仮定と補題 2 の仮定および補題 1 より，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}^+\Omega_{k-1} \equiv_{3\triangle} \boldsymbol{F}^+\Omega'_{k-1} \equiv_{3\triangle} \boldsymbol{G}^+\Omega'_{k-1} \\
&\boldsymbol{F}^-\overline{\Omega}_{k-1} \equiv_{3\triangle} \boldsymbol{F}^-\overline{\Omega'}_{k-1} \equiv_{3\triangle} \boldsymbol{G}^-\overline{\Omega'}_{k-1}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって，補題 7 と補題 1 より，

$$
\begin{aligned}
\phi\Omega_n &\equiv_{3\triangle} \phi\{\boldsymbol{F}^+\Omega_{k-1}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}^-\overline{\Omega}_{k-1}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\} \\
&\equiv_{3\triangle} \phi\{\boldsymbol{G}^+\Omega'_{k-1}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}^-\overline{\Omega'}_{k-1}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\} \\
&\equiv_{3\triangle} \phi\Omega'_n
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ゆえに，補題は成り立つ． □

A.3 補題 3 の証明

前半の 2 つは，文献 5) の 3.3 節冒頭の命題を本論文の記号で書き換えたものである．後半の 4 つは文献 5) の Lemma 3.1 を少しだけ拡張したものであり，この Lemma の証明と同じ手法で証明できる．

ここでは，次の 2 つ

$$M[\![G^{\mathbf{ft}}]\!]_V = \mathbf{t} \quad \text{ならば} \quad M[\![G]\!]_V = \mathbf{t} \qquad (23)$$

$$M[\![G^{\mathbf{ft}}]\!]_V = \mathbf{u} \quad \text{ならば} \quad M[\![G]\!]_V \neq \mathbf{f} \qquad (24)$$

だけを証明する．他の 4 つも同様に証明できる．

$G^{\mathbf{ft}}$ の構造に関して帰納的に証明する．

(i) $G^{\mathbf{ft}} = \mathbf{f}$ の場合

$G^{\mathbf{ft}} \neq \mathbf{t}$，$G^{\mathbf{ft}} \neq \mathbf{u}$ なので，式 (23) と (24) は成り立つ．

(ii) $G^{\mathbf{ft}}$ が $\mathbf{f}$ 以外のアトムの場合．

$G^{\mathbf{ft}} = G$ なので，式 (23) と (24) は成り立つ．

以下では，$G = G_1$，$G^{\mathbf{ft}} = G_1^{\mathbf{ft}}$，$G^{\mathbf{tf}} = G_1^{\mathbf{tf}}$，および，$G = G_2$，$G^{\mathbf{ft}} = G_2^{\mathbf{ft}}$，$G^{\mathbf{tf}} = G_2^{\mathbf{tf}}$ のとき，式 (23) と (24) および

$$
\begin{aligned}
&M[\![G^{\mathbf{tf}}]\!]_V = \mathbf{f} \quad \text{ならば} \quad M[\![G]\!]_V = \mathbf{f} \\
&M[\![G^{\mathbf{tf}}]\!]_V = \mathbf{u} \quad \text{ならば} \quad M[\![G]\!]_V \neq \mathbf{t}
\end{aligned}
$$

が成り立つと仮定する．

(iii) $G^{\mathbf{ft}} = G_1^{\mathbf{ft}} \leftarrow G_2^{\mathbf{tf}}$ の場合

$G = G_1 \leftarrow G_2$ と仮定してよいので，

$$
\begin{aligned}
&M[\![G^{\mathbf{ft}}]\!]_V = \mathbf{t} \\
&\iff M[\![G_1^{\mathbf{ft}}]\!]_V = \mathbf{t} \quad \text{または} \quad M[\![G_2^{\mathbf{tf}}]\!]_V = \mathbf{f} \\
&\Longrightarrow M[\![G_1]\!]_V = \mathbf{t} \quad \text{または} \quad M[\![G_2]\!]_V = \mathbf{f} \\
&\iff M[\![G]\!]_V = \mathbf{t} \\
&M[\![G^{\mathbf{ft}}]\!]_V = \mathbf{u} \\
&\Longrightarrow M[\![G_1^{\mathbf{ft}}]\!]_V = \mathbf{u} \quad \text{または} \quad M[\![G_2^{\mathbf{tf}}]\!]_V = \mathbf{u} \\
&\Longrightarrow M[\![G_1]\!]_V \neq \mathbf{f} \quad \text{または} \quad M[\![G_2]\!]_V \neq \mathbf{t} \\
&\iff M[\![G]\!]_V \neq \mathbf{f}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ゆえに，式 (23) と (24) は成り立つ．

(iv) $G^{\mathbf{ft}} = \neg G_1^{\mathbf{ft}}$ の場合

(v) $G^{\mathbf{ft}} = G_1^{\mathbf{ft}} \vee G_2^{\mathbf{ft}}$ の場合

(vi) $G^{\mathbf{ft}} = G_1^{\mathbf{ft}} \wedge G_2^{\mathbf{ft}}$ の場合

これらの場合は (iii) と同様に証明できる．

(vii) $G^{\mathbf{ft}} = \exists x G_1^{\mathbf{ft}}$ の場合

$G = \exists x G_1$ と仮定してよいので，M の領域を D とおくと，

$$
\begin{aligned}
&M[\![G^{\mathbf{ft}}]\!]_V = \mathbf{t} \\
&\iff \exists d \in D \text{ s.t. } M[\![G_1^{\mathbf{ft}}]\!]_{V[d/x]} = \mathbf{t} \\
&\Longrightarrow \exists d \in D \text{ s.t. } M[\![G_1]\!]_{V[d/x]} = \mathbf{t} \\
&\iff M[\![G]\!]_V = \mathbf{t} \\
&M[\![G^{\mathbf{ft}}]\!]_V = \mathbf{u} \\
&\Longrightarrow \exists d \in D \text{ s.t. } M[\![G_1^{\mathbf{ft}}]\!]_{V[d/x]} = \mathbf{u} \\
&\Longrightarrow \exists d \in D \text{ s.t. } M[\![G_1]\!]_{V[d/x]} \neq \mathbf{f} \\
&\iff M[\![G]\!]_V \neq \mathbf{f}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ゆえに，式 (23) と (24) は成り立つ．

(viii) $G^{\mathbf{ft}} = \forall x G_1^{\mathbf{ft}}$ の場合

この場合は (vii) と同様に証明できる． □

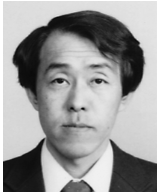
(平成 11 年 9 月 17 日受付)
(平成 12 年 9 月 7 日採録)

秋葉　澄孝（正会員）

1988 年北海道大学大学院修士課程修了．同年，電子技術総合研究所入所．現在，知能情報部に所属．機械学習に興味を持つ．人工知能学会，日本ソフトウェア科学会各会員．

佐藤　泰介（正会員）

1975 年 3 月東京工業大学大学院修士課程修了（電気工学専攻）．工学博士．東京工業大学大学院情報理工学研究科教授．主たる研究テーマは，記号的統計推論．訳書に「人工知能–エージェントアプローチ」（共立出版，分担）．人工知能学会，EATCS 各会員．



元吉　文男（正会員）

1976 年東京大学大学院理学系研究科物理学専門課程修士課程終了．同年通産省電子技術総合研究所入所．現在同研究所知能情報部帰納推論ラボリーダ．博士（工学）．著書「LISP で学ぶ認知心理学」（東大出版会，1983）（共著），「数式処理システム」（昭晃堂，1986）（共著），訳書「プログラムの構造と実行（上，下）」（マグローヒル出版，1989）．