2Q−7 充足可能性問題の0−1整数計画問題への定式化と計算効率

大柳 俊夫　山本 雅人　大内 東
(北海道大学)

1 はじめに

命題論理や第一階述語論理の充足可能性問題(SAT)は，情報科学の基本的な問題の一つであり，現在まで多くの研究が行われている．それらの研究は，Robinsonの導出原理に基づく方法[1]とOR技法の一つである0-1整数計画法(0-1IP)を適用する方法[2]に大別できる．これら2つのアプローチに共通する前提は，一般にSATが節形式で与えられることである．

本論文では，命題論理のSATを節形式に変換せずに，直接0-1IP問題に変換するアルゴリズムを示す．そして，SATの充足可能性と0-1IP問題の整数制約を除き連続緩和した問題(LR問題)の解の間の関係を明らかにする．さらに，節形式に対するDavis-PutnamのアルゴリズムとLR問題を解く線形計画法の関係を示す．

2 SATの0-1IP問題への直接変換

2.1 研究の背景

SATに対する0-1IPを基礎としたこれまでの研究は，命題論理式を節形式に変換した後のSAT(SAT′と呼ぶ)を0-1IP問題に変換して解くことに焦点が絞られていた[2][3]．その一方で，命題論理式を，節形式に変換する方法に関する研究も盛んに行われている．これに対して本研究では，命題論理式で表されたSATを節形式に変換することなく直接0-1IP問題に変換する方法を示す．以上の関係を図1に示す．

$$\begin{array}{ccc} \text{SAT} & \Longrightarrow & \text{SAT}' \\ \searrow & & \swarrow \\ & \text{0-1IP 問題} & \\ \text{(本研究)} & & \text{(従来の研究)} \end{array}$$

図1 SATと0-1IP問題の関係

2.2 命題論理式の線形不等式集合への変換

命題論理式を，線形の不等式集合に変換するアルゴリズム**trans_formula**を図2に示す．図に示すように,trans_formulaは，手続き**trans1**と**trans2**を再帰的に呼ぶ．

ここで,Cが求める線形の不等式集合を表す．また，命題論理式中の正のリテラルをL_i，そのリテラルに対応する0-1変数をx_i，新しく導入する0-1変数をx'_kとしている．

```
program trans_fomula;
begin
    C ← φ;
    k ← 0;
    for all B ∈ SAT do
        trans1(B);
    remove equalities if possible
end.

procedure trans1(B:FORMULA);
begin
    case (a form of B) of
        B=L_i :
            C ← C ∪ {x_i = 1};
        B=~ B_1 :
            trans2(B_1,y);
            C ← C ∪ {y = 0}
        B=B_1 ∧ ··· ∧ B_n :
            for i := 1 to n do trans1(B_i);
        B=B_1 ∨ ··· ∨ B_n :
            for i := 1 to n do trans2(B_i,y_i);
            C ← C ∪ {y_1 + ··· + y_n ≥ 1}
        B=B_1 → B_2 :
            trans2(B_1,y_1); trans2(B_2,y_2);
            C ← C ∪ {y_1 - y_2 ≤ 0}
        B=B_1 ↔ B_2 :
            trans2(B_1,y_1); trans2(B_2,y_2);
            C ← C ∪ {y_1 - y_2 = 0}
    end
end;

procedure trans2(B:FORMULA;var y :VARIABLE);
begin
    case (a form of B) of
        B=L_i :
            y ← x_i;
        B=~ B_1 :
            trans2(B_1,z);
            k ←k + 1;
            C ←C ∪ {z + x'_k = 1};
            y ←x'_k
        B=B_1 ∧ ··· ∧ B_n:
            for i := 1 to n do trans2(B_i,z_i);
            k ←k + 1;
            C ←C ∪ {Σ_{i=1}^n z_i - x'_k ≤ n - 1} ∪ {Σ_{i=1}^n z_i - n x'_k ≥ 0};
            y ← x'_k
        B=B_1 ∨ ··· ∨ B_n :
            for i := 1 to n do trans2(B_i,z_i);
            k ←k + 1;
            C ←C ∪ {Σ_{i=1}^n z_i - x'_k ≥ 0} ∪ {Σ_{i=1}^n z_i - n x'_k ≤ 0};
            y ← x'_k
        B=B_1 → B_2 :
            trans2(B_1,z_1); trans2(B_2,z_2);
            k ←k + 1;
            C ←C ∪ {z_1 - z_2 + x'_k ≤ 1} ∪ {z_1 - z_2 + 2x'_k ≥ 1};
            y ← x'_k
        B=B_1 ↔ B_2 :
            trans2(B_1,z_1); trans2(B_2,z_2);
            k ←k + 2;
            C ←C ∪ {z_1 + z_2 - x'_{k-1} ≤ 1} ∪ {z_1 + z_2 - 2x'_{k-1} ≥ 0}
                 ∪ {z_1 + z_2 + x'_{k-1} - 2x'_k = 1};
            y ← x'_k
    end
end;
```

図2 直接変換アルゴリズム

Transformation of SAT into Zero-one Integer Programming Problem

Toshio Ohyanagi, Masahito Yamamoto and Azuma Ohuchi
Hokkaido University

そして,trans_formula により得られた集合 C 中の線形不等式と SAT の間には，以下の関係が成立する．

関係 C 中のすべての不等式を満足する 0-1 整数解が存在すれば SAT は充足可能である．存在しなければ充足不可能である．

2.3 変換例

変換例として，図 3 に，命題論理式 $\mathrm{B} = L_3 \leftrightarrow (L_1 \wedge \sim L_4)$ の変換過程と結果を示す．これに対して,B を節形式

$$\mathrm{B}' = (L_1 \vee \sim L_3) \wedge (\sim L_3 \vee \sim L_4) \wedge (\sim L_1 \vee L_3 \vee L_4)$$

に変換して得られる線形不等式集合は，

$$\mathrm{C}' = \{\ x_1 - x_3 \geq 0, x_3 + x_4 \leq 1, -x_1 + x_3 + x_4 \geq 0\ \}$$

となる．この例では,C と C′は異なっている．

```
C ← φ
trans1(L3 ↔ (L1 ∧ ~ L4))
   trans2(L3, y1)
      y1 ← x3
   trans2((L1 ∧ ~ L4), y2)
      trans2(L1, z1)
         z1 ← x1
      trans2(~ L4, z2)
         trans2(L4, z1)
            z1 ← x4
         C ← C ∪ { x4 + x1' = 1}
         z2 ← x1'
      C ← C ∪ { x1 + x1' − x2' ≤ 1 } ∪ { x1 + x1' − 2x2' ≥ 0 }
      y2 ← x2'
   C ← C ∪ { x3 − x2' = 0}
```

$$\mathrm{C} = \{\ x_3 - x_2' = 0,\ x_4 + x_1' = 1,\ x_1 + x_1' - x_2' \leq 1,\ x_1 + x_1' - 2x_2' \geq 0\ \}$$

⇓ remove two equalities.

$$\mathrm{C} = \{\ x_1 - x_3 - x_4 \leq 0,\ -x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 1\ \}$$

図 3 変換例

3 SAT と LR 問題の関係

3.1 0-1IP 問題の定式化

2.2 で述べた関係より,SAT を解くためには，C 中のすべての不等式を満足する 0-1 整数解が存在するか否かを調べることが問題となる．そのため，まず C 中のすべての不等式を変換して，$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ という形式にし，それをもとに，次の 0-1IP 問題を定式化する[1]．

$$\begin{aligned}&\text{(0-1IP) min} \quad x_0 \\ &\qquad \text{sub. to } \ x_0\mathbf{e} + \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \quad x_j \in \{0,1\} \quad (0 \leq j \leq n).\end{aligned}$$

ここで,e はすべての成分が 1 である m 次元列ベクトルである．そして，整数解の探索を行うために,(0-1IP) の整数条件を緩和した次の線形計画問題 (LR) を考える．

$$\begin{aligned}&\text{(LR) min} \quad x_0 \\ &\qquad \text{sub. to } \ x_0\mathbf{e} + \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \quad 0 \leq x_j \leq 1 \quad (0 \leq j \leq n).\end{aligned}$$

[1] A は m × n 行列,x は n 次元列ベクトル，そして b は m 次元列ベクトルである．

3.2 諸定理と考察

SAT の充足可能性と LR 問題の解の間の関係に関する 4 つの定理を以下に示す．

定理 1 LR 問題の最適値が $x_0 > 0$ で終了すれば，対応する SAT は充足不可能である．

定理 2 LR 問題の最適値が $x_0 = 0$ で，整数解が得られていれば，対応する SAT は充足可能である．

定理 3 LR 問題の最適値が $x_0 = 0$ で，整数解が得られていなければ，その時点で対応する SAT の充足可能性を判定することはできない．

定理 4 $x_0 = 0$ である整数解を探索し，整数解が存在すれば対応する SAT は充足可能である．存在しなければ SAT は充足不可能である．

定理 1 と 2 より，LR 問題を解くことにより,SAT を解くことができる場合があることがわかる．特に定理 1 に関しては，SAT が節形式の場合，『LR 問題で $x_0 > 0$ となるための必要十分条件は,Davis-Putnam の方法の 1 リテラル規則で充足不可能性が導かれることである』ことが証明されている [3]．これは，一般の SAT の場合にも成り立つと考えられる．また定理 3 は，0-1 整数解の探索を行わなければならない場合を示唆している．この場合は，整数計画法 (分枝限定法，切除平面法，陰的列挙法など) を用いて解の探索を行うことになるが，実行可能解を発見した時点で探索を打ち切ることができる．

4 おわりに

分枝限定法と Davis-Putnam の方法，切除平面と導出節の間には密接な関係があることが知られているが [3][4]，SAT に対する 0-1IP 問題を用いたアプローチにおいて，整数計画法の中のどの手法が最も適しているかを決定することは今後の大きな課題であると考えられる．

参考文献

[1] Chang,C. and Lee,R.C.: Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, Academic Press, Orland, 1973

[2] Hooker,J.N.: A Quantitative Approach to Logical Inference, Decision Support Systems, Vol. 4, pp.45-69, 1988

[3] Blair,C.E., Jeroslow,R.G. and Lowe,J.K.: Some Results and Experiments in Programming Techniques for Propositional Logic, Computer and Operatioins Research, Vol. 13, No. 5, pp.633-645, 1986

[4] Hooker,J.N.: Input Proofs and Rank one Cutting Planes, ORSA Journal on Computing, Vol. 1, No. 3, pp.137-145, 1989