5B−10

ひも図形の変形過程の知識表現

山田雅之　　伊藤英則
名古屋工業大学

1. はじめに

ひも状の図形の変形過程を表現する言語を提案する。なお，ここではひもに囲まれた領域に点を有している図形を対象とする。この言語で表現できる図形と結び目理論における表現との対応について述べる。さらに，ひも図形の基本変換を定義し，その応用例を示す。

2. ひも言語

2.1. 諸定義

ひも図形をひも(線)の交点とその領域内の点の集合 N で表現する。点 fi は上向きのとき fi_+，下向きのとき fi_- とし，図中には ⊙，⊗ で表す(以下，点を単に f および・で表すこともある)。交点は二種類で C^4(図1.a) および C^2(図1.b) とする。図1.a において $X_{i.1}, X_{i.2}, X_{i.3}, X_{i.4}$ は交点 Ci^4 の4方向の線分を表し，$R_{i.1}, R_{i.2}, R_{i.3}, R_{i.4}$，は交点 C_i^4 の領域を表し $R_{i.1}$ は C_i^4 に関して $R_{i.3}$ に対照な領域であるという。図1.b において $X_{i.1}, X_{i.2}$ は交点 C_i^2 の2方向の線分を表し，$R_{i.1}, R_{i.2}$ は交点 C_i^2 の領域を表す。交点 C_i^l を次のように表現する。

$$\{C_i^l, L, P, R, F\}$$

C_i^l: i 番目の交点，l は交点の種類を表し2または4である。

L: 交点の符号 $\{+,-,0\}$ を表す。C_i^4 のとき，符合は上交点の方向に向かって右側から交点が潜る場合 +，逆の場合 - となる。C_i^2 のときは0とする。

P: Ci^4 のときは $(X_{j.o}, X_{k.p}, X_{l.q}, X_{m.r})$($o,p,q,r$ はそれぞれ1から4の値)で表す。$X_{j.o}$ は $X_{i.1}$ の繋がっている線分のである。$X_{k.p}, X_{l.q}, X_{m.r}$ も同様に，$X_{i.2}, X_{i.3}, X_{i.4}$ とそれぞれ繋がっている線分である。C_i^2 のときは $(X_{j.o}, X_{l.p})$ で表す。(図1.c の場合 $X_{k.p}=X_{j.3}$)

R: C_i^4 のときは $(R_{j.o}, R_{k.p}, R_{m.q}, R_{n.r})$ で表す。交点 Ci の領域 $R_{i.1}$ は C_j の領域 $R_{j.o}$(o は1,2,3,4のいずれか)と重複している領域である。$R_{k.p}, R_{m.q}, R_{n.r}$ も同様とする(図1.c の場合は $R_{j.o}=[R_{j.1}]$)。C_i^2 のときは $(R_{j.o}, R_{k.p})$ で表す。

F: C_i^4 のときは $(F_{i.1}, F_{i.2}, F_{i.3}, F_{i.4})$ で表す。$F_{i.j}$ は領域 $R_{i.j}$ に存在する点のリストとする(図1.c の場合は $F_{i.1}=[f_+]$)。C_i^2 のときは $(F_{i.1}, F_{i.2})$ で表す。

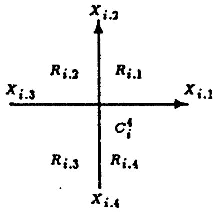


図1.a

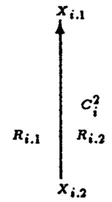


図1.b

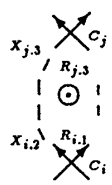


図1.c

2.2. ひも図形の表現例

図2.a, 図2.b のひも図形をひも言語で表現する。

$N_1=\{ \{C_1^4,+,(X_{1.4}, X_{1.3}, X_{1.2}, X_{1.1}),([R_{1.3}],[],[R_{1.1}],[]),$
$([],[],[],[f+])\}\}$

$N_2=\{ \{C_1^4,+,(X_{2.4}, X_{2.3}, X_{3.2}, X_{3.1}),([],[],[f-],[]),([R_{2.3}],[R_{2.2},R_{3.2}],$
$[R_{3.1}],[R_{2.4},R_{3.4}]),([],[],[f-],[])\},$
$\{C_2^4,-,(X_{3.4}, X_{3.3}, X_{1.2}, X_{1.1}),([R_{3.3}],[R_{1.2},R_{3.2}],$
$[R_{1.1}],[R_{1.4},R_{3.4}]),([],[],[],[])\},$
$\{C_3^4,+,(X_{1.4}, X_{1.3}, X_{2.2}, X_{2.1}),([R_{1.3}],[R_{1.2},R_{2.2}],[R_{2.1}],$
$[R_{1.4},R_{2.4}]),([f-],[],[],[])\} \}$

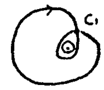


図2.a

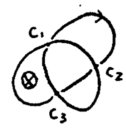


図2.b

3. 結び目理論との対応

補題1 ひも図形の領域に在る一つの点は一つの環に置換できる。□

例. 図3.a をひも言語で表すと N である。図3.a は図3.b に置換できる。図3.b は結び目理論における群表示 D と等価である。

$N=\{\{C_1^2,0,(X_{2.2}, X_{2.1}),([R_{2.1}],[R_{2.2}]),([],[f+])\},$
$\{C_2^2,0,(X_{1.2}, X_{1.1}),([R_{1.1}],[R_{1.2}]),([],[f+])\}\}$

$D= \langle x_1, x_2, x_3, x_4 | x_1=x_2,\ x_3=x_4,\ x_2 x_4 x_1^{-1} x_3^{-1}=1 \rangle$

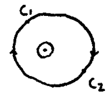


図3.a

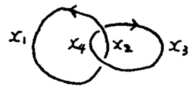


図3.b

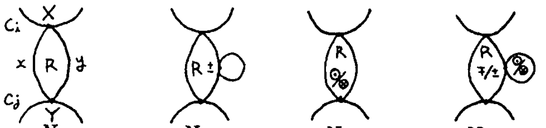
結び目理論では正則表示(結び目)に代数的処理をすることにより，その正則表示の不変量を得ることができる。

Knowledge Representation for String Graph Processing
Masashi Yamada and Hidenori Itoh
Nagoya Institute of Technology

4. 基本変換

X,Y と C_i,C_j,x,y からなるひも図形を変形するための基本変換 twist,put,delete,grind を定義する。

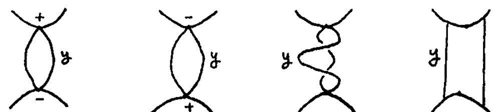
- $\mathrm{twist}(\pm,y,R,N_0)=N_1$:$N_0$ の線分 y 上に交点 (符号は + または -) を作り, かつその交点に関して R に対照な領域のみを作る。
- $\mathrm{put}(f_\pm,R,N_0)=N_2$:$N_0$ の領域 R に点 $f_\pm$ を追加する。
- $\mathrm{delete}(f_\pm,N_2)=N_0$:$N_2$ の点 $f_\pm$ を削除する。
- $\mathrm{grind}(\pm,f_{\pm/\mp},y,R,N_2)=N_3$:$N_2$ の線分 y 上に交点 (符号は + または -) を作り, かつその交点に関して R に対照な領域のみを作る。また点 $f_\pm$ を削除し, 新たにできた領域に点 $f_\pm$ を挿入する。



N_0 N_1 N_2 N_3

次に基本変換 pull を定義する。 pull は C_i,C_j の符号が ±/∓ のときのみ定義される。前者 / 後者を N_{0a}/N_{0b} とする。

- $\mathrm{pull}(\overline{y},N_{0a})=N_4$　・$\mathrm{pull}(\underline{y},N_{0a})=N_5$



N_{0a} N_{0b} N_4 N_5

ここに,$\overline{y}$ は y が x の上を通り,$\underline{y}$ は y が x の下を通ることを意味する。同様に,N_{0b} についても pull が定義できる。

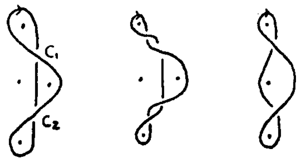
定理 2 領域数が n のひも図形に変換 twist,grind を行なうと, 変換後の領域数は n±1 となる。また変換 pull を行なうと領域数は n±2 となる。□　証明　省略

5. 応用例

5.1. あやとり「コマザライ」の変形過程 (一部) の表現

ここでは, 点をあやとりにおける指と考え, 基本変換を行ない N_1 から N_8 を作成する。

- $\mathrm{delete}(f4_+,R_{1.2},N_1)=N_2$
- $\mathrm{pull}(\overline{X_{1.2}Y_{2.3}},N_2)=N_3$
- $\mathrm{put}(f4_+,R_{2.4},N_3)=N_4$
- $\mathrm{delete}(f2_+,N_4)=N_5$
- $\mathrm{delete}(f4_+,N_5)=N_6$
- $\mathrm{pull}(\overline{X_{2.1}Y_{3.4}},N_6)=N_7$
- $\mathrm{put}(f2_+,R_{1.2},N_7)=N_8$



N_1 N_4 N_8

5.2. N_1,N_4,N_8 のひも言語による表現

N_1={ $\{C_1^4$,+,$(X_{1,4},X_{2.3},X_{2.2},X_{1.1})$,($[R_{1.3},R_{2.1},R_{2.3}]$, $[R_{2.2}]$,$[R_{1.1},R_{2.1},R_{2.3}]$,[]),([f2],[f4],[f2],[f1])},
$\{C_2^4$,-,$(X_{2.4},X_{1.3},X_{1.2},X_{2.1})$,($[R_{1.1},R_{1.3},R_{2.3}]$, $[R_{1.2}]$,$[R_{1.1},R_{1.3},R_{2.1}]$,[]),([f2],[f4],[f2],[f3])} }

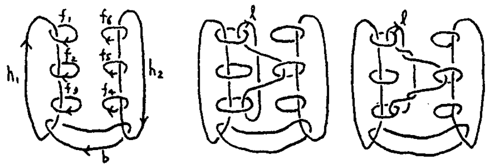
N_4={ $\{C_1^4$,+,$(X_{1,4},X_{2.3},X_{2.2},X_{1.1})$,($[R_{1.3},R_{2.1},R_{2.3}$, $R_{3.1},R_{3.3},R_{4.1},R_{4.3}]$,$[R_{2.2}]$,$[R_{1.1},R_{2.1},R_{2.3},R_{3.1},R_{3.3}$, $R_{4.1},R_{4.3}]$,[]),([f2],[],[f2],[f1])},
$\{C_2^4$,+,$(X_{3.4},X_{1.3},X_{1.2},X_{3.1})$,($[R_{1.1},R_{1.3},R_{2.3}$, $R_{3.1},R_{3.3},R_{4.1},R_{4.3}]$,$[R_{1.2}]$,[$[R_{1.1},R_{1.3},R_{2.1},R_{3.1},R_{3.3}$, $R_{4.1},R_{4.3}]$,$[R_{3.4}]$),([f2],[],[f2],[f4])},
$\{C_3^4$,-,$(X_{2.4},X_{4.3},X_{4.2},X_{2.1})$,($[R_{1.1},R_{1.3},R_{2.1}$, $R_{2.3},R_{3.3},R_{4.1},R_{4.3}]$,$[R_{4.2}]$,$[R_{1.1},R_{1.3},R_{2.1},R_{2.3},R_{3.1},R_{4.1}$, $R_{4.3}]$,$[R_{2.4}]$),([f2],[],[f2],[f4])},
$\{C_4^4$,-,$(X_{4,4},X_{3.3},X_{3.2},X_{4.1})$,($[R_{1.1},R_{1.3},R_{2.1}$, $R_{2.3},R_{3.1},R_{3.3},R_{4.3}]$,$[R_{3.2}]$,$[R_{1.1},R_{1.3},R_{2.1},R_{2.3},R_{3.1},R_{3.3}$, $R_{4.1}]$,[]]),([f2],[],[f2],[f3])} }

N_8={ $\{C_1^4$,+,$(X_{1,4},X_{2.3},X_{2.2},X_{1.1})$,($[R_{1.3},R_{2.1},R_{2.3}]$, $[R_{2.2}]$,$[R_{1.1},R_{2.1},R_{2.3}]$,[])],([],[f2],[],[f1])},
$\{C_2^4$,-,$(X_{2.4},X_{1.3},X_{1.2},X_{2.1})$,($[R_{1.1},R_{1.3},R_{2.3}]$, $[R_{1.2}]$,$[R_{1.1},R_{1.3},R_{2.1}]$,[]),([],[f2],[],[f3])} }

5.3. あやとりの正則表示

補題 3 あやとりにおけるひもの状態に対し, 指をひもに置き換えることにより多項式による不変量を与えることができる。□

例. 指をひもに置き換える一方法を上図 N_1,N_4 を用いて下図 D_1,D_4 に示す。またそれぞれの群表示を示す。
尚, 図 D_0 は指のみの表示であり,D_1 から D_4 への変化は基本変換 delete→pull→put によるものである。



D_0 D_1 D_4

$D_i(i=0,1,4)$ の群表示は以下のようになる。

$$D_i=\langle b,h_1,h_2,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,l \mid b=h_1h_2bh_2^{-1}h_1^{-1},\ h_2b^{-1}h_2b h_2^{-1}=f_4f_5f_6h_2f_6^{-1}f_5^{-1}f_4^{-1},\ h_1h_2b^{-1}h_2^{-1}h_1h_2bh_2^{-1}h_1^{-1}=f_1f_2f_3h_1f_3^{-1}f_2^{-1}f_1^{-1},\ f_3h_1^{-1}f_3h_1f_3^{-1}=r_3,\ f_2f_3h_1^{-1}f_3^{-1}f_2f_3h_1f_3^{-1}f_2^{-1}=r_2,\ f_1f_2f_3h_1^{-1}f_3^{-1}f_2^{-1}f_1f_2f_3h_1f_3^{-1}f_2^{-1}f_1^{-1}=r_1,\ f_6h_2^{-1}f_6h_2f_6^{-1}=r_6,\ f_5f_6h_2^{-1}f_6^{-1}f_5f_6h_2f_6^{-1}f_5^{-1}=r_5,\ f_4f_5f_6h_2^{-1}f_6^{-1}f_5^{-1}f_4f_5f_6h_2f_6^{-1}f_5^{-1}f_4^{-1}=r_4\rangle$$

但し,D_0 においては,

$\{r_1=f_1,\ r_2=f_2,\ r_3=f_3,\ r_4=f_4,\ r_5=f_5,\ r_6=f_6\}$

D_1 においては,

$\{r_1=l^{-1}f_1l,\ r_2=f_2,\ r_3=f_5f_1^{-1}l^{-1}f_1f_5^{-1}f_3f_5f_1^{-1}lf_1f_5^{-1},\ r_4=f_4,\ r_5=f_5f_1^{-1}l^{-1}f_1f_5f_1^{-1}lf_1f_5^{-1},\ r_6=f_6\}$

D_4 においては,

$\{r_1=l^{-1}f_1l,\ r_2=f_2,\ r_3=f_5f_1l^{-1}f_1^{-1}l^{-1}f_1^{-1}lf_1f_5^{-1}f_1^{-1}l^{-1}f_1lf_1lf_1^{-1}l^{-1}f_1^{-1}lf_1^{-1}lf_1f_5f_1^{-1}l^{-1}f_1lf_1lf_1^{-1}f_5f_1l^{-1}f_1^{-1}l^{-1}f_1^{-1}lf_1f_5^{-1}f_1^{-1}l^{-1}f_1l^{-1}f_1lf_1l^{-1}f_1^{-1}l^{-1}f_1^{-1}lf_1f_5f_1^{-1}l^{-1}f_1lf_1lf_1^{-1}f_5^{-1},\ r_4=f_4,\ r_5=f_5f_1l^{-1}f_1^{-1}l^{-1}f_1^{-1}lf_1f_5f_1^{-1}l^{-1}f_1lf_1lf_1^{-1}f_5^{-1},\ r_6=f_6\}$

6. おわりに

与えられたひもの状態から群表示を求める計算量は O(2^n) であり, またその表示の記述量は O(n) である。ここで提案したひも言語表示では, 前者は O(n^2) であり, 後者は O(n^2) である。今後, 基本変換と結び目理論との関係をさらに調査する。

参考文献 河内明夫:「結び目理論」, シュプリンガーフェアラーク東京 (株)