距離場空間モデルによる汎オフセット概念とその応用

徳 増 眞 司[†]　巽　久 行[†]
村 井 保 之[†]　仁 尾　都[††]

距離場空間モデルの前身である距離尺度モデルについては，それが空間に距離尺度を導入するものであること，また，物体と，物体が埋め込まれる母空間を等質的に扱うことによって，従来の形状モデルの欠点を補間できるロバストで拡張性の高い形状モデルとなりうることを，本誌ですでに報告済みである．本研究は，本モデルに基づく次なる展開として，汎オフセットの概念を新たに導入し，それが本モデルの特有の概念である超球オフセットや超球フィレット，凸包体などの新しい概念を生むこと，それが今まで困難であった形状の生成に有効であることを理論と実証によって示す．なお，今回の報告では，本論の展開を容易にするために，あらかじめ前記距離尺度モデルを，距離場に基づく距離場空間モデルとして再構成し，諸概念の整理を行う．

Introduction and Application of a New Concept of Generic Offset to Distance Field Space Model

Shinji Tokumasu,[†] Hisayuki Tatsumi,[†] Yasuyuki Murai[†]
and Misato Nio[††]

The Distance Measure Model (DMM) was introduced on this magazine as a more robust and more flexible geometric model than conventional ones. This is because the proposed model implemented a new concept “Distance Measure” and treats an object as a part of the mother space which embeds it. In this paper, a much newer concept: “Distance Field Model (DFM)” is introduced by re-creating the DMM as the new model which is based on “Distance Field” instead of distance measure. Then, in order to make use of the DFM as a geometric model, a new geometric concept “generic offset” is introduced. Moreover, several new concepts of the DFM such as “super ball offset”, “super ball fillet” and “convex envelope” are derived from the concept, as the new features never given before. Finally, the DFM is examined and verified by numerical simulations with respect to these concepts.

1. はじめに

我々人間は，様々な物理的な現象を空間の場としてとらえて，その実体を解釈する．たとえば，天候を考える場合には，どこそこの気温や気圧がどうであるとか，風速や風向がこれこれであるとかいう．この場合は，スカラー場としての温度場や圧力場，またはベクトル場としての速度場ないし流れ場を指しているのである．その他の例として物体の変形などを考える場合には，テンソル場としての応力場が問題になる．一方で，我々の知覚の基となる五感は，視覚を除けば，自分の周囲の非常に限られた近傍でしかこれらの場をとらえることはできない．これに反して，我々は，視覚を通して数キロ先，数十キロ先にある物体でさえ，それなりの確からしさで，場合によってはその動きまで含めて認識することができる．さらに，望遠鏡とか，顕微鏡とかの器具の力を借りればその及ぶ範囲はほぼ無限である．したがって，物体形状の認識に関しては，この視覚がフルに活用される．多くの場合，遠く離れた場の認識さえもこの視覚によって補われる．たとえば，ティーグラウンドに立つゴルファーは，グリーン上の旗の揺らぎを見てその風向きを知る．

もっとも，この視覚にも弱みがある．死角に入ったものは見えないことである．このような場合には聴覚の方が優れているかもしれないが，全体的な空間の把握力において視覚のそれにはるかに及ばない．

さて，人間の感知しにくい物理の現象を計算機で解析する技術は，いわゆる計算物理や計算力学という世界で発展しており，我々の劣悪な知覚を完全に補い，

† 神奈川工科大学情報工学科
Department of Information and Computer Sciences, Kanagawa Institute of Technology
†† 明星大学情報学部
Faculty of Informatics, Meisei University

かつリードしている．一方，計算機による物体形状の処理に関しては，人間の視覚の強みと弱みをそのまま持ち込んだ状況になっている．今日あるグラフィックディスプレーによる対話型図形処理の隆盛はまさにその強みの現れた部分である．しかし，逆にそれは，計算幾何学の重要な部分，すなわち認識とか理解に相当する多くの部分を人間に委ねてしまっているということである．そのため，計算機自身の視覚の発達にとって，かえってマイナスであったという言い方もできる．たとえば，CAD の世界では，計算幾何学は製品形状の表現としてはともかく，それにかかわる物体の配置，加工，組立，さらに，これらの搬入据付，分解などの，いわゆる作業の手順の設計に関しては不十分であり，もっと主体的な役割を負うことが要求されている．そのためには，人間の視覚能力に依存した対話処理を前提にする考え方だけでは不十分であり，計算機の視覚による知覚（認識と理解）に適合した形状表現モデルの設定が必要である．

本誌で報告した文献 1) の内容は，その時点では新しい形状モデルを強く全面に打ち出したものになっているが，すでにこのような背景を暗に意識したものであり，計算機の視覚能力が，人間の他の感覚と同じように，そのとき着目する点を中心として，ある限られた近傍にしか及ばないという仮定を前提にする．本報告では，本論を進めるうえでの事前の準備として，まず，距離尺度モデルの発想の原点に戻りこれを形状モデルとしてはもとより，むしろ将来的には空間モデルとしての特徴を生かした活用を図るために，これを距離場空間モデルと改名し，空間に距離尺度の新しい解釈である，距離場を導入して簡明なオブジェクト指向形式に再構成する[2)〜4)]．すなわち，距離場空間モデルは，物体ないし物体形状自身を，一般の物理量と同じように空間の場として扱う．それは，距離場とも呼ぶべき場であり，着目する点に関して，対象とする物体の境界に至る距離に関連するベクトル場である．ついでながら，詳しい内容については後述するが距離尺度モデルにおける相対位置データは距離場空間モデルでは距離場データに対応することになる．

本報告では次に，本研究の主たる部分であるが，本モデルに基づく具体的な展開として，汎オフセットの概念を新たに導入し，それが本モデルの特有の概念である超球オフセットや超球フィレット，凸包体などの新しい概念を生むこと，それが今まで困難であった形状の生成に有効であることを理論と実証によって示す．

2. 距離場空間モデルの諸概念と実装形式

本章では，前章で述べた距離場の概念を具体化するために，距離尺度モデルに代わる，距離場空間モデルの諸概念をオブジェクト指向プログラミングの用語を用いて定義する．

2.1 距離場空間モデルと距離場

まず初めに，天下り的になるが，目標とする距離場空間モデルに対して次のような定義を与えておく．

「距離場空間モデルは，**母空間**と呼ばれるユークリッド空間 E^n において，その部分空間として与えられる**図形**が，母空間上で点と図形との距離にかかわり，後述する形式を有する**距離場**を形成するという前提の下に，図形自身の形状，図形と母空間または図形と図形との位置関係を，逆に距離場を用いて，記述ないし操作を行うことを可能とする空間表現のモデルである．」 □

特に，母空間の次元に注目するときは，n **次元距離場空間モデル**という．ここで，n としては 2 または 3 が当面の対象になるが，本論では可能な限り一般的な議論を行う．なお，本モデルでは，図形は母空間に部分空間として埋め込まれたものとして解釈することができ，点，直線，平面，球など，n 次元以下の空間を原理的に許容しており，伝統的な形状モデルのように有界な n 次元多様体であることを前提としない．

母空間上の任意の 1 点における距離場に着目するとき，その点を**場の空間点**（あるいは，単に**空間点**）と呼び，さらに着目する図形が生成するその点における距離場の値を**距離場データ**と呼んで，次式に示すリスト形式で与える．

(内外判定データ，距離データ，
　近地点データ，種別フラグ)　　(1)

ここに，図形 G が生成する距離場に対して空間点 P においては，

内外判定データ（IO）　空間点 P が
　図形 G の中にある場合，“IN”．
　図形 G の外にある場合，“OUT”．

距離データ（d）
　空間点 P と図形 G の境界 δG との（最短）距離，またはその下側近似値（距離下界という）．

近地点データ（Q）　空間点 P が
　境界 δG 上で最短距離をとる点の 1 つ．
　上記の点を手順が設定できない場合，“NIL”．

種別フラグ（KIND）　距離（d）と近地点（Q）が
　正しく設定された場合，“1”．
　それ以外の場合，“2”．

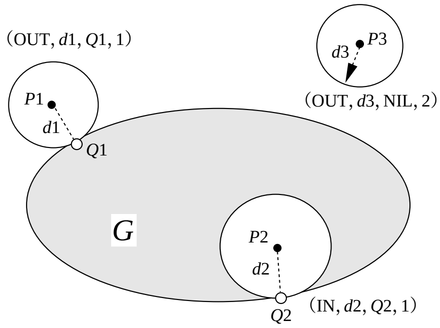


図 1 距離場データ
Fig. 1 Distance field data.

となる．**図 1** に図形と空間点の位置関係で決定される距離場データの例を示す．

ところで，図形が陽に定義されている前提の下では，距離データは（最短）距離として正確に得られるはずであるが，近似的な距離下界として得られても距離データとして扱うものであり，距離尺度モデルの場合と同様に，このことが，距離場空間モデルの本質的な部分である．この意味で，距離場データは種別フラグが "1" の場合を**第一種**，"2" の場合を**第二種**であるという．また，すべての空間点 P に対して第一種の距離場データを与える図形 G を**第一種の図形**といい，**それ以外の図形を第二種**という．ちなみに，この種別は，個々の点や図形に本質的な属性ではなく，距離データないし，近地点データを正確に求める手順を実装したか，近似的な距離下界を求める手順で妥協したかによる区別を示すものである．ところで，距離場データは距離尺度モデルにおける相対位置データに対応する概念であるが，相対位置データにおける（最短）距離上界を，不要な要素として除去している．

2.2 図形オブジェクト

本論では距離場空間モデルにおける図形を，オブジェクト指向言語におけるオブジェクトとして扱う．その意味で図形を指す場合には，**図形オブジェクト**という．図形オブジェクトを記述するクラスは，前述の点，直線，平面，球など，図形のトポロジーないし図形どうしの和，差，積など，図形の生成手順を規定する型を代表するものとする．また，図形オブジェクトは，距離場データを基本的なインスタンス変数（メンバデータ）として含んでおり，図形オブジェクトの記述や操作のためのメソッド（メンバ関数）を有する．メソッドを介して，空間の記述や操作を支持する指令を**メッセージ**と呼ぶ．距離場空間モデルは与えられたメッセージ系列を順次実行することによって機能する．

以下，距離場空間モデルの言語体系の基本となるメッセージを LISP 言語に準じて，次のようなリスト形式で記述する．図形 G に対するメッセージは：

(図形 G.メソッド名; パラメータ列;
　　オペランド図形の列)　　(2)

ここで，第 1 要素を**メッセージ名**と呼んでおく．パラメータおよびオペランド図形（図形オブジェクト）とも，メソッド自身を規定するデータである．メッセージとして，最も基本的なものは，図形オブジェクトの生成にかかわる，コンストラクタであり，メソッド名としては，C++や Java にならって，クラス名を用いる．メッセージ名の最初の "図形 G." は不要である．この際，式 (2) におけるパラメータ列およびオペランド図形には，図形を規定するインスタンス変数が対応しており，コンストラクタはこれらの変数を初期化し図形オブジェクトを生成する．したがって，これは次のような形式で表される．

(クラス名; 初期化用パラメータ列;
　　初期化用オペランド図形の列)　　(3)

さらに，式 (3) で生成された図形オブジェクトに文字列で表される**図形名**を，

図形名 = 式 (3)　　(4)

として定義し，あとでオペランドとして参照する必要のある特定の図形オブジェクトを代表させるものとする．

ところで，最も重要なメッセージは，本モデルの核をなす**距離場関数（メソッド）**にかかわるものであり，与えられた図形 G の空間点 P における距離場データを算定する．距離場関数名を "**距離場**" としておくと，

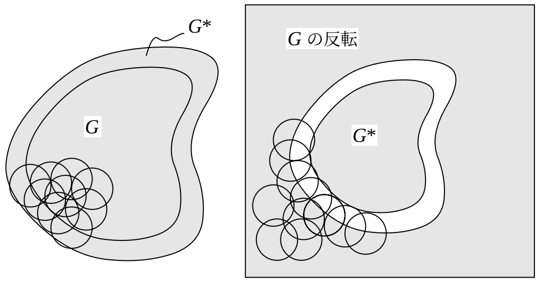
(図形名 G.距離場; 空間点 P;
　　オペランド図形)　　(5)

と書ける．距離場空間モデルにおける距離場関数は，距離尺度モデルにおける相対表現手順に対応する関数であり，図形のクラスごとに一定の処理手順が与えられる[1)〜4)]．

このほか図形の表示や，図形のマスプロパティの算定など，伝統的な形状モデルが有する処理もすべてメソッドとして表されるので，前記と同様なメッセージ形式を与えることができる．注意すべきことは，これらのメソッドは，すべてのクラスに共通な唯一的な手順として構成できることである．したがって，これらの関数とそれらを規定するパラメータは，すべての個別図形クラスに共通な 1 つの上位クラス（スーパークラス）に，各々メソッドおよびインスタンス変数として記述し，個別クラスに継承させることができる．また，距離場データもすべての個別距離場関数に共通で式 (1) のように表されるので，これも上記スーパーク

ラスのインスタンス変数とすることができる．

結局，このようにして構成される距離場空間モデルは，距離尺度モデルの機能である立方体や球などの図形プリミティブの生成や図形間の集合演算から始まって，関数合成による図形生成，写像を用いた形状変形など，幾何モデルとして有用な各種の図形操作機能を実現できる[1),5)~8)]．本論では，これら基本的な事項についての議論は割愛して，本モデルに特有の概念として導入した汎オフセットによる図形生成について次章以降で議論する．



（a）外側へのオフセット　（b）内側へのオフセット

図 2　超球を用いた図形の汎オフセット（超球オフセット）
Fig. 2　Generic offset by super-ball (Super-ball offset).

3. 図形のオフセットに関する新概念の導入

本章では，実用的な図形処理において典型的な概念である図形のオフセットに関して新しい考え方を導入することによって，前章で述べた距離場の概念に基づいて構成される距離場空間モデルが従来の図形処理モデルに対して際だった特徴を有することを示す．

3.1 図形の汎オフセット

“図形のオフセット”に代わる概念として，“図形の汎オフセット”という概念を導入し次のように定義する．

［図形の汎オフセット］　空でない任意の図形 G が与えられたとき，G 上の各点 P ごとに定められた図形 $g(P)$ を対応させ，$g(P)$ を G 内の点 P 全体にわたって集合和をとる操作を “図形 G の汎オフセット” と呼び，得られる図形 G^* を “図形 G の汎オフセット図形” という．　□

この定義による “図形の汎オフセット” は，一見して明らかに，従来のオフセットとも，図形の拡大とも異なることが分かる．その本質的な違いは，この概念が従来のオフセットなどと異なって，図形 G の境界の位置や，各点における傾きや曲率などの微分幾何学的な情報を陽に前提としていないところにある[9),10)]．しかし，それにもかかわらず，汎オフセットの概念は従来の概念を自然に包含する．すなわち，次のような解釈が可能である．

前記図形 $g(P)$ は，G 上の各点 P ごとに任意に設定できるわけであるが，図形が規定される空間の次元を持つ開なる超球 g^* を，各点 P に対して，g^* の中心点が点 P に一致するように配置することによって $g(P)$ を規定することにすると，結果として得られる汎オフセット図形 G^* は，元の図形 G を前記半径だけ外側にオフセットした図形と概念的に等価になる（**図 2**(a)）．

一方，与えられた図形 G を一度反転し，次に前記超球 g^* を用いてこの反転図形を汎オフセットし，結果をもう一度反転すれば，得られた図形は元の図形 G を前記超球の半径だけ内側にオフセットした図形と概念的に等価になる（図 2 (b)）．したがって，上で述べたこととあわせると，新たに導入した “汎オフセット” は，いわゆる “オフセット” を拡張した一般的な意味を持つことになる．

3.2 汎オフセット図形の距離場関数

次に，汎オフセットとして，前節で紹介した超球をベースとする汎オフセットを取り上げ，この図形に対する距離場関数を構成する．すなわち，汎オフセットの定義に基づいて，元の図形 G の各点 P に対応させる図形 $g(P)$ を，点 P に中心をおく半径 r の超球 1 種類に決める．以下，このような超球を用いた汎オフセットを特に**超球オフセット**と呼ぶ．

このとき，超球オフセット図形 G^* のコンストラクタは式 (6) で表現される．

(超球オフセット; 半径 r; 図形 G)　　(6)

または，クラス名をオフセットと簡単化して，さらに式 (4) に従って，

G^* = (オフセット; 半径 r; 図形 G)　　(7)

として用いる．オフセットの手順，すなわち，超球オフセットの距離場関数は次のようになる．

超球オフセットの距離場関数：

(G^*. 距離場; 空間点 P; 図形 G)

まず，G^* が上記のメッセージを受けると，図形 G に対して距離場メッセージ (G. 距離場; 空間点 P; 図形 G のオペランド図形) を送る．図形 G からは，距離場データとして

(IO, d, Q, KIND)　　(8)

が戻される．この後，図形 G^* の距離場データの決定は，次のように場合分けされる．

（a）　IO = “IN” の場合

これは，**図 3** の空間点 $P(1)$ の場合に相当する．式 (8) が第一種の場合には，半直線 PQ と Q を中心とする半径 r の超球との交点を R とする．次に，空間

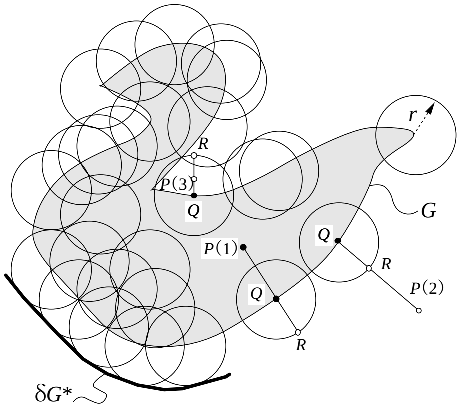


図 3 超球オフセットの距離場
Fig. 3 Distance field of super-ball offset.

点 R に対する距離場メッセージを，図形 G に送る．その返信データを，

(IO1, $d1$, $Q1$, KIND1)

とする．ここで，IO1 = “OUT” かつ $d1 = r$ である場合には，図形 G^* に対する距離場データを，

(“IN”, $d + r$, R, 1)

とする．また，これ以外の場合には，

(“IN”, $d + r$, NIL, 2)

とする．

（b） IO = “OUT”，$d \geq r$ の場合

これは，図 3 の空間点 $P(2)$ の場合に相当する．式 (8) が第一種の場合には，図形 G^* に対する距離場データを，

(“OUT”, $d - r$, R, 1)

とする．また，これ以外の場合には，

(“OUT”, $d - r$, NIL, 2)

とする．

（c） IO = “OUT”，$d < r$ の場合

これは，図 3 の空間点 $P(3)$ の場合に相当する．式 (8) が第一種の場合には，半直線 QP と Q を中心とする半径 r の超球との交点を R とする．次に，空間点 R に対する距離場メッセージを図形 G に送る．その返信データを，(IO1, $d1$, $Q1$, KIND1) とする．ここで，$d1 = r$ である場合には，図形 G^* に対する距離場データを，

(“IN”, $r - d$, R, 1)

とする．また，$d1 \neq r$ の場合には，

(“IN”, $r - d$, NIL, 2)

とする．最後に，式 (8) が第二種である場合には，後述の超球判定法により，空間点 P の内外判定データ IOP，距離データ δ を求め，これを用いて，空間点 P の図形 G^* に対する距離場データを，

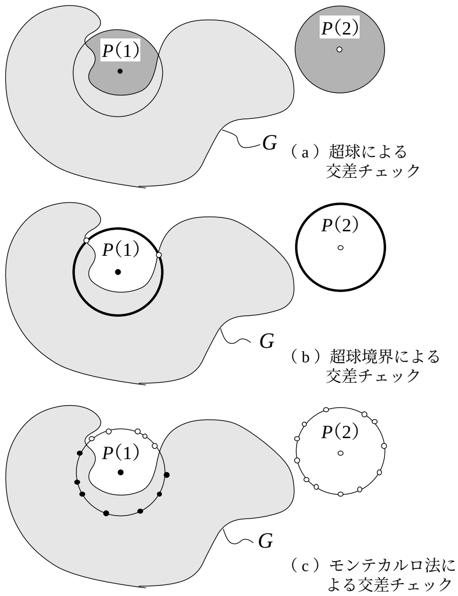


図 4 超球判定法
Fig. 4 Super-ball decision test.

(IOP, δ, NIL, 2)

とする． □

超球判定法

次に，超球判定法について，**図 4** を用いて説明する．超球判定法とは，空間点 P が図形 G に対して外 (IO = “OUT”) で $d < r$，かつ距離場データが第二種 (KIND = 2) であるときに，空間点 P の図形 G^* に対する内外判定を行う手順のことである．図 4 に (a)，(b) および (c) として 3 種類の考え方を示す．まず，(a) では，点 P を中心として，半径 r の超球を描く．次にこの超球と図形 G との交差をチェックする．交差する場合には，内外判定を “IN” とし，そうでない場合には，“OUT” とする．点 $P(1)$ は，前記超球が，図形 G と交差するので，“IN” であり，また，点 $P(2)$ は，超球が図形 G と交差しないので，“OUT” である．(b) の方法は，超球の代わりに，超球境界を用いることを除けば，(a) とまったく同じである．ただし (b) の場合は図形 G が前記超球内部に含まれてしまう場合に対するチェックが必要である．なお，交差チェックの方法としては，たとえば，三次元の場合，(a) には八分木法を，(b) には，四分木法を適用することができる．(c) の方法は，(b) の方法を効率化するためにモンテカルロ法を適用したものである．すなわち，あらかじめ一定数 N を設定し，前記超球境界上に最大 N 個の点を一様乱数を用いて発生させ，各サンプル点に対して，逐一，図形 G に距離場メッセージを送って内外判定を行う．点 $P(1)$ の場合のように，

前記超球境界上に発生させた前記点群の中に，図形 G に属する点が検知された時点で，点 P の属性を "IN" と判定する．また，点 $P(2)$ の場合のように，N 個すべての点群が図形 G の外にあるとき，点 P の属性を "OUT" と判定する．この場合には，図形 G に対するサンプル点の距離データから，図形 G^* に対する空間点 P の距離データ (δ) を推定することができる（詳細略）．□

以上述べた超球判定法の妥当性については，超球オフセットの定義により明らかであるが，同様の理由から，超球の手順を，図形 $g(P)$ として超球の代わりに，点 P に中心をおく 1 種類の点対称図形を用いた場合にも容易に拡張可能である．

4.　汎オフセット操作を用いた形状変形による図形の生成

ここでは，オフセットの拡張概念である，図形の汎オフセットを用いた図形操作について述べる．汎オフセットの概念は解釈の仕方によっていろいろな応用が考えられるが，本章における汎オフセットは，超球による汎オフセット（略して，超球オフセット）に限るものとする．

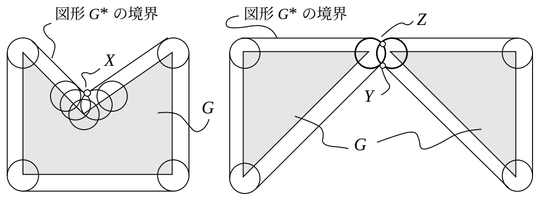
4.1　滑らかな図形の生成

超球オフセット操作を用いてあらかじめ与えられた図形 G を変形して，至るところ滑らかな別の図形を生成することを考える．まず，以下の議論のためにいくつかの概念を導入する．

定義 1　図形 G の境界点 P に関し，点 P に端点を置く 1 本のベクトルを考える．このベクトル上に中心を置き，点 P に接する球の中に，その内部の点がすべて図形 G に属するものが存在するとき，そのベクトルを，図形 G における，点 P に関する "許容された向き" であるという．また，このような開球を "境界球" という．□

定義 2　図形 G の境界点 P に関し，許容された向きごとに，境界球の半径の上限をとり，さらに許容された向きの全体にわたって下限をとって得られる値を，図形 G の点 P における "境界曲率半径" という．さらに，図形 G の境界点全体にわたって，この境界曲率半径の下限をとって得られる値を，図形 G の境界曲率半径という．□

図形 G が境界曲率半径 r を持ち，かつ連結な位相多様体になっている場合には，次のような解釈ができる．すなわち，「境界上の任意の 2 点に関し，半径が r より小さい球を，境界に接しながら，かつ，図形の外にはみでないように転がして，連続的に一方から他方



（a）曲率制約を満たす場合　（b）曲率制約を満たさない場合

図 5　超球オフセットと曲率制約の関係

Fig. 5　Super-ball offset and curvature constraint.

へ移動させることができる」．この命題は，このあとで定理 1 として証明する．

定義 3　図形 G を，半径 r をパラメータとする超球オフセット（(r) 超球オフセットと表す）して得た図形 G^* が，r 以上の境界曲率半径を持つとき，超球オフセットは "曲率制約を満たす" という．□

(r) 超球オフセットは，その定義から，任意の図形 G に作用してこれを多様体に代えようとする効果があり，実際，結果としての図形 G^* は，いわゆる位相多様体となり，図形 G で境界であった点を内点として取り込み，かつ新たに境界となった点，すなわち，図形 G^* のすべての境界点において，半径 r 以上の境界球を持つ許容された向きが少なくとも 1 つ存在する．したがって，定義 3 で述べた内容は，多くの場合において成立する．**図 5** はこのような状況を説明している．すなわち，図 5 (a) は曲率制約を満たす超球オフセットの場合であるが，図で，境界点 X は無数の許容された向きを持つが，いずれの向きに関しても半径 r 以上の境界球を持つ．他の境界点では，許容された向きは 1 つしか存在しない．図 5 (b) は曲率制約を満たさない場合である．明らかに，境界点 Y および Z における境界曲率半径は r より小さいからである．

定理 1　境界曲率半径 r を持つ図形 G の反転を $(r1)$ 超球オフセットして得られる図形 $G1$ は，すなわち，

$$G1 = (\text{オフセット};\ \text{半径}\ r1;\ (\text{反転};\ ;\ G)) \quad (9)$$

は，$r > r1 > 0$ のとき，境界を含めて n 次元位相多様体となる．すなわち，$G1$ の閉包は境界を有する n 次元位相多様体であり，かつ境界は至るところ滑らか．すなわち，境界は $n-1$ 次元 C^1 級可微分多様体となる．さらに $G1$ は曲率制約を満たす．

（証明）（**図 6** を参照）図形 $G1$ の任意の境界点を P とする．また，図形 G における点 P の近地点を Q とする．このとき，長さ $PQ = r1$ である．点 Q を中心とし，半径 $r1$ の球 $C1$ の内部は，超球オフセットの定義により図形 $G1$ に属する．したがって，図形 $G1$ の境界は，点 P で球 $C1$ に接し，球 $C1$ の外にある．次に，点 P を中心とし PQ を半径とする球は，

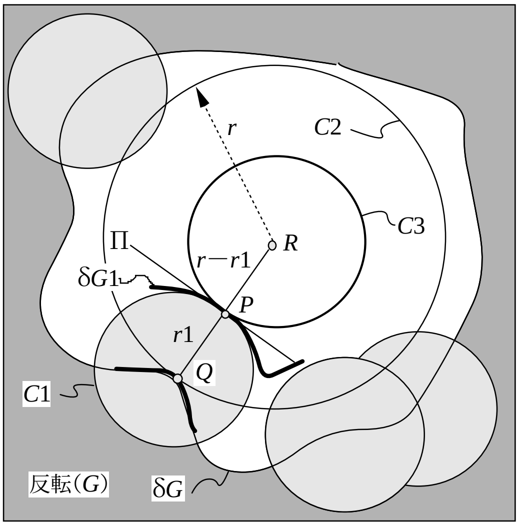


図 6 定理 1 の説明図
Fig. 6 Auxiliary map for Theorem 1.

図形 G の反転図形の外にあるので，図形 G に属する．したがって，定義 1 により，ベクトル QP は，点 Q の図形 G に関する許容された向きとなる．これと定義 2 により，図形 G は，ベクトル QP 上に中心 (R) を置き，点 Q で境界に接する半径 r の球 $(C2)$ を内部に含む．したがって，G の反転図形および，その境界 δG は，球 $C2$ の外にある．したがって，$(r1)$ 超球オフセットの定義により，図形 $G1$ は，R を中心とし，半径 RP $(= r - r1)$ の球 $(C3)$ と点 P で接し，球 $C3$ の外にある．したがって，結局図形 $G1$ の境界は点 P を通り，点 P で互いに接している球 $C1$ と $C3$ の外にある．この事実と，境界 δG 上の各点が少なくとも 1 つ半径 r の境界球を含むという事実をあわせると，図形 $G1$ の点 P における近傍が，点 P を通る，球 $C1$ と $C3$ に共通な平面 Π の，点 Q 側の半球と同相になることが分かる．ちなみに具体的な同相写像は，上記近傍の各点を通る RP 方向の線分を，その点を通る直線が，前記半球を切る線分と 1 対 1 に対応させることによって得られる（この写像を ϕ とする）．したがって，任意の境界点は，空間 E^n の半空間と同相な近傍を持つことになり，これと図形 $G1$ の内点が空間 E^n と同相な近傍を持つこととあわせると，結局，図形 $G1$ の閉包は，境界を有する n 次元位相多様体であることが分かる．また，図形 $G1$ の境界は，点 P の近傍で平面 Π と同相（この写像 φ は写像 ϕ を境界に限定することによって得られる）になる．次に，ドメイン φ にあり，点 P に距離 ε で近接する任意の境界点 P' を考える．点 P' についても，点 P と同じく接平面 Π' が存在し，この場合にも上と同様な同相写像 ψ を考えることができる．点 P' と平面 Π の距離のオーダーは，ε^2 である．同様に，点 P と平面 Π' の距離は ε^2 のオーダーである．このことから点 P と，点 P' で計測した関数 $\psi\varphi^{-1}$ の偏微係数は，オーダー ε で近接していなければならない．したがって，点 P' が点 P に近接する任意の境界点であったことを考慮すると，$\psi\varphi^{-1}$ の偏微係数が点 P に関して連続であることになる．結局，図形 $G1$ が境界に関して，$n-1$ 次元 C^1 級可微分多様体であることが分かる．次に，図形 $G1$ は，任意の境界点 P において球 $C2$ を境界球として持つが，ベクトル PQ は点 P で平面 Π に直交するので，これが唯一の許容される方向である．したがって，$G1$ の境界曲率半径は $r1$ 以上となり，曲率制約は満たされる． □

定理 1 の系 1 定理 1 の条件の下で，超球オフセット図形 $G1$ の任意の境界点に対する，図形 G 上の近地点は，ただ 1 つ存在する．逆に，図形 G の任意の境界点 P に対する図形 $G1$ 上の任意の近地点 Q に対して $\overline{PQ} = r1$ である．

（証明）定理 1 の証明で，図形 G の境界が球 $C2$ の外になることにより，点 P の近地点は点 Q 1 つしか存在しないことが分かる．ついでながら，逆に図形 G の任意の境界点 Q の任意の許容された方向と図形 $G1$ の境界との交点 P は，点 Q に対する図形 $G1$ の近地点であり，$\overline{PQ} = r1$ である． □

4.2 フィレット図形の生成

製品設計の際，製品形状に現れる凸部や凹部の角は，それがシャープすぎると安全上，または美観上問題があるので，そこに一定の丸み付けをするのが普通である．これをフィレット処理というが，図形処理的な観点からするとフィレット図形の生成はそれ自身複雑なオフセット処理と比べてはるかに高度な処理を必要とする．特に，凸部と凹部が会合する部分では困難な問題が発生し，処理のロバスト性に大きな影響を与える．しかし，ここでも超球オフセットが有効であり，この概念が巧妙に問題を解決する．以下にその方法を述べる．与えられた図形 G の凸部を半径 $r1$ の球で丸め，凹部を半径 $r2$ の球で丸めるフィレット図形は，(a) まず図形 G を $(r2)$ 超球オフセットし，(b) この図形 $(G1)$ の反転図形を $(r1 + r2)$ 超球オフセットし，(c) 次にこの図形 $(G2)$ の反転図形を $(r1)$ 超球オフセットした図形 $(G3)$ として得られる．すなわち，

（a） $G1$=(オフセット; 半径 $r2$; G)
（b） $G2$=(オフセット; 半径 $r1+r2$; (反転; ; $G1$))

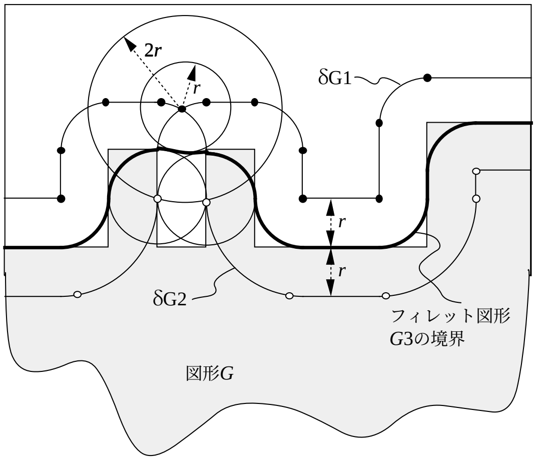


図 7　フィレットの説明図
Fig. 7　Auxiliary map for fillet operation.

（c）　$G3$=(オフセット; 半径 $r1$; (反転; ; $G2$))
である．このようにして得られるフィレット図形を図形 G の ($r1$, $r2$) 型フィレット図形といい，

(フィレット; 半径 $r1$, 半径 $r2$; 図形名 G,
または図形オブジェクトデータ) (10)

と表す．

定理 1 の系 2　図形 G の ($r1$, $r2$) 型フィレット図形 ($G3$) の閉包は，第 2 段の超球オフセットが曲率制約を満たすならば，位相多様体であり，かつ，境界上至るところ滑らかである．ここに，$r1$, $r2 > 0$ とする．
（証明）第 2 段の超球オフセット (b) が，曲率制約を満たすならば，図形 $G2$ の境界曲率半径 (r) は，$r1$+$r2$ 以上である．したがって，定理 1 により題意がいえる．　□

図 7 に，(r, r) 型フィレット図形の生成手順を図示する．図で梨地表示の部分がオペランド図形 G であり，●点で連結された曲線部 $\delta G1$ は，前記手順 (a) で図形 G を，外側に $r2 = r$ だけ超球オフセットした図形 $G1$ の境界であり，同様に○点で連結された曲線部 $\delta G2$ は，前記手順 (b) で図形 $G1$ を，内側に $r1 + r2 = 2r$ だけ超球オフセットした図形 $G2$ の境界である．図で，曲線部 $\delta G2$ の上部が図形 $G2$ の内部である．最後に，太線で示した曲線部 δG は，前記手順 (c) で図形 $G2$ を，内側に $r1 = r$ だけ超球オフセットした超球オフセット図形 $G3$ の境界である．図で，曲線部 δG の下部が図形 $G3$ の内部である．これは，上記［定理 1 の系 2］の事実を説明する好例となっており，図で，2 つの同心円によって図 6 に相当する部分を示している．

4.3　スキニング図形の生成

与えられた図形 G の境界を内側の面として持つ一定厚さの図形を生成することが，実際上しばしば必要になる．このような図形を（図形 G の）スキニング図形というが，スキニング図形の生成は，図形の汎オフセットを用いて簡単に生成できる．すなわち，図形 G の (r) 超球オフセットから図形 G の集合差をとればよい．すなわち，たとえば反転と集合和 (+) を用いて，集合差 (−) の手順がすでに定義されているとすれば，

(−; ; (汎オフセット; 半径 r;
図形 G), 図形 G)　(11)

と書ける．こうするのではなく，スキニングの手順を，

(スキニング; 厚さ r; 図形 G)　(12)

として，独立に構成したいときには，図形 G の内部の点がスキニング図形の外部になることを考慮して，すでに述べた汎オフセットの手順を少し変更するだけでよい．

4.4　擬凸包体の生成

ユークリッド空間において，凸集合は一般に次のように定義されている．

定義 4　点集合 S に属する任意の 2 点を結ぶ線分が集合 S に属するとき，集合 S は凸である，または凸集合であるという．　□

この定義は，集合 S が閉である場合には次の定義と同値であることが証明される．

定義 4’　集合 S は，集合 S に属さない任意の一点 P に関して，点 P を含み，集合 S と素な，開半空間が存在するとき凸である．　□

すなわち，定義 4’ で凸な集合は，定義 4 でも凸である．ただし，その逆は集合 S が閉集合の場合を除いて必ずしも成立しない．ところで定義 4’ において任意の半空間は，超球の半径を無限に引き伸ばしたものと解釈できるので，定義 4’ を用いて，“擬凸” を次のように定義する．

定義 5　集合 S は，集合 S に属さない任意の 1 点 P に関して，点 P を含み，集合 S と素な，あらかじめ定められた一定半径 r の，超球が存在するとき，クラス r の擬凸集合であるという．　□

さらに，集合 S の凸包体に対応して，“擬凸包体” の概念を，次のようにして導入する．

定義 6　集合 S を含む，クラス r の極小な擬凸集合を，集合 S のクラス r の擬凸包体という．また，クラス r の擬凸包体 S_r に関して，$S_\infty = \bigcup_{r=0}^{r<\infty} S_r$ で定義される S_∞ を，クラス ∞ の擬凸包体という．　□

ここで，次のような図形を定義する．

$G_r =$ (フィレット; 半径 $r1 = 0$;
半径 $r2 = r$; 図形 G) (13)

定理 2 閉図形 G に関して，下記が成立する．

(1) 式 (13) で表される図形 G_r は，図形 G に関するクラス r の閉擬凸包体である．

(2) 式 (13) で表される G_r，$G_{r'}$ $(r < r')$ に関し，$G_r \subseteq G_{r'}$ である．

(3) 図形 G に関するクラス ∞ の擬凸包体 G_∞ の閉包 $\overline{G_\infty}$ は，図形 G が開集合の閉包であるとき，その閉凸包体である．

(証明)

(1) フィレットの定義より，

$G_r{}'=$ (オフセット; 半径$=r$; 図形 G)
$G_r{}''=$ (オフセット; 半径$=r$; (反転; ; $G_r{}'$))
$G_r=$ (オフセット; 半径$=0$; (反転; ; $G_r{}''$))
$=$ (反転; ; $G_r{}''$)

である．半径 r の超球は開球であるから，$G_r{}'$，$G_r{}''$ は開集合であり，したがって G_r は閉集合である．また，明らかに $G_r \supseteq G$ である．さらに，G_r の補集合 $G_r{}''$ の点は $G_r{}''$ 内の半径 r の超球に含まれるので，G_r はクラス r の擬凸集合である．次に G_r の点 P と，(反転; ; $G_r{}'$) との距離は r 以上である．このことは，G_r 内の任意の点 P を中心とする半径 r の超球 $C(P)$ の内部にある任意の点と図形 G との距離は，r より小さいことを意味する．したがって，点 P を含む半径 r の任意の超球は，その中心が超球 $C(P)$ に含まれるので，図形 G と交わる．すなわち，点 P を含み図形 G と素な半径 r の超球は存在しないことになる．したがって点 P は，図形 G を含むすべてのクラス r の擬凸集合に含まれるので，図形 G_r はこのなかで極小な擬凸集合となる．これから，図形 G_r は図形 G に関するクラス r の閉擬凸包体であることがいえる．

(2) 一般に点集合 S のクラス r' の擬凸包体は，S を含むクラス r の擬凸集合でもある．したがって，(1) の事実から題意がいえる．

(3) まず，図形 G の任意の 2 つの内点 P，Q を選んだとき，これらの点は G 内部に近傍を有するので，2 つの点を結ぶ線分上の任意の点は，ある値以上の r を持つ G_r の内点であり，したがって G_∞ に含まれる．数学的帰納法により一般に，図形 G の任意個数の内点の凸結合で表される任意の点は，図形 G_∞ の内点であることが示される．このような点の集合を S_∞ とすると，S_∞ は凸集合である．さらに，その閉包 $\overline{S_\infty}$ も凸集合であり，これは図形 G の凸包体である．ところで，G_∞ は S_∞ を含むので，その閉包 $\overline{G_\infty}$ は S_∞ の閉包 $\overline{S_\infty}$ を含む．しかるに，$\overline{S_\infty}$ 外部の任意の点は，定義 4’ により，その点を含み図形 G と素な開半空間が存在するので，その近傍を含めて，いずれの G_r $(0 \leq r < \infty)$ にも属さない．これは，$\overline{S_\infty}$ 外部の任意の点が，$\overline{G_\infty}$ に含まれないことを意味する．結局，$\overline{G_\infty} = \overline{S_\infty}$ であり，図形 G の凸包体となることが分かる． □

5. 数値実験による検証

距離場空間モデルのプロトタイプを，PowerMac G4/400 上に，ThinkC++を用いて実装し，本モデルの数値実験による検証を行った．

5.1 数値実験

(0,0,0) に中心を置く 1 辺長さ 10 の立方体と，(5,5,5) に中心を置く半径 6 の球を組み合わせた，図形 $G0$ を基本的なテスト形状とする．この図形は，表示メソッドによって，**図 8** (a-1) または同図 (a-2) のように 2 通りの方法で表示される．前者はいわゆる八分木法による “八分木表示” であり，後者は，八分木表示で得た立方体セルに含まれる図形の境界を多面体として切り出して表示したものであり，以降，“多面体表示” という[6),8),11)]．以下，距離場空間モデルに特有ないくつかの図形生成の方法とその結果を示す．なお，処理時間の測定結果についても図中に並記した．

(1) スキニング図形の生成

図 8 (b-1)，(b-2) に示す図形は，元になる図形 $G0$ の表面を外側に一定厚さ $(= 2)$ だけ厚み付けした図形を，内部を覗くために中心 (8,1,1)，半径 7 の球でくり抜いたものである．

(2) 擬凸包体の生成

図 8 (c-1)，(c-2) で図形 $G2$ は，図形 $G0$ のクラス $r2$ $(= 20)$ の擬凸包体である．図形 $G2$ は半径 $r2$ を十分大きくとってあるので，図 8 (c-1) のように真の凸図形に近いものになる．このうち図 8 (c-2) は，図形 $G2$ から元の図形 $G0$ を除去した図形 $G20$ である．ここで，図形 $G2$ は図形 $G0$ の近似的な凸包体となるので，図形 $G20$ は，図形 $G0$ を凸な部材から切り出す場合に切削で除去しなければならない，近似的な最小領域として解釈できる．

(3) フィレット図形の生成

凸部半径 $r1$ と凹部半径 $r2$ を等しく，2 と 2 および 3 と 3 にした，図形 $G0$ に関する 2 つのフィレット図形 $G32$ と $G33$ を生成する．

これらの図形は，図 8 (d-1)，(d-2) のように表示される．図形 $G32$ に相当する図形は従来の方法でも可

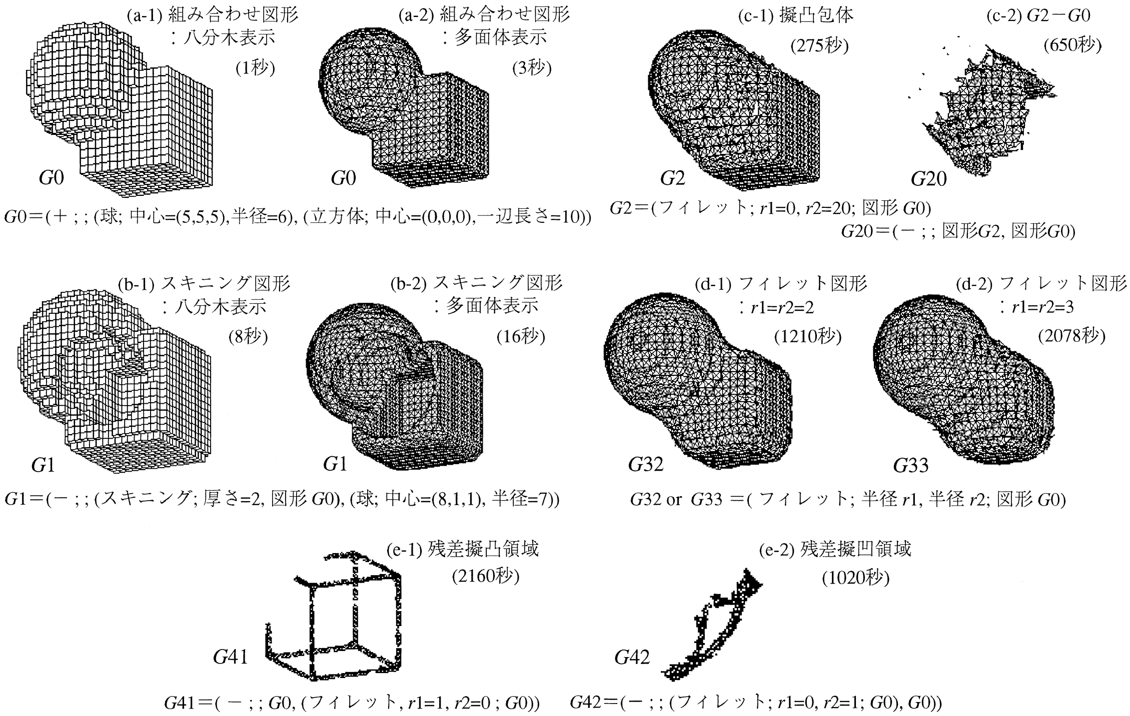


図 8　数値実験の結果
Fig. 8　Results of geometric simulation.

能であるが，ここに示した図形は従来法において典型的な双 3 次曲面パッチなどを用いて近似したものではなく，完全な超球を転がして得られたものである．さらに，図形 $G33$ の場合には，フィレットの凸部と凹部が互いに干渉してしまうため，従来法ではできないか，言い換えれば制限事項になっているか，あるいは滑らかさを確保するための特別な例外処理を必要とするケースである．これに反して，本モデルではいずれも同一の操作で達成される．

(4)　凹凸に関する図形フィーチャの抽出

擬凸包体の概念を延長して，距離尺度モデルにおける 2 つの形状フィーチャを導入する．

定義 7　図形 G に関して，次の 2 つの式

$$G' = (-;\ 図形\,G, (フィレット;\ 半径\,r1,\ 半径\,r2 = 0;\ 図形\,G))$$
$$G'' = (-;\ (フィレット;\ 半径\,r1 = 0,\ 半径\,r2;\ 図形\,G), 図形\,G) \quad (14)$$

で表される図形 G' および G'' を，それぞれ，図形 G にかかわる “クラス $r1$ の残差擬凸領域” および “クラス $r2$ の残差擬凹領域” という．　□

クラス $r1$ の残差擬凸領域とは，半径 $r1$ の超球を元の図形 G の境界面内側に沿って転がしたとき，超球によってスキャンすることのできない境界側の領域であり，残差擬凹領域は半径 $r2$ の超球に関して前記の内側を外側として逆にした場合に得られる領域である，と解釈できる．この概念に基づく図形生成を示したのが図 8 (e-1)，(e-2) であり，図 8 (e-1) および図 8 (e-2) は，それぞれ，図形 $G0$ にかかわるクラス $r1$ $(= 1)$ の残差擬凸領域およびクラス $r2$ $(= 1)$ の残差擬凹領域である．これから，これらの概念に基づく図形生成を行うことによって，俗にいう凸なる図形辺と凹なる図形辺を識別することができる．ちなみに，先に言及した図形 $G20$ は，図形 $G0$ にかかわるクラス $r2$ $(= 20)$ の残差擬凹領域でもある．ただし，この場合には，前述したような別の解釈も与えられる．

5.2　結果に関する考察

以上の実験結果から，まず距離場空間モデルは，従来の幾何モデルが困難としている空間認識・理解の問題を，距離場という唯一の概念のもとで統一的に処理する機能を有することが分かる．さらに，本モデルは当初意図したように幾何モデルとしての機能をほとんど備えている．しかしながら，幾何モデルとして位置付けた場合には，その拡張された機能に対する処理性能は，通常設計過程で要求される応答性に関しては，はなはだ不十分である．もちろん，図形生成そのものは，コンストラクタが動作するだけなのでほとんど瞬

時に終わるが，問題は図形の表示である．本モデルは，空間ないし図形に関して，点とそれにかかわる距離場の概念しか持たないため，モデルの統一性という利点と引き替えに境界面や境界線については探索的に表示しなければならない．したがって表示は，最も時間のかかる処理の1つであるといえる．図8(a-1)，(b-1)に示したように，八分木表示メソッドは，簡略表示手段として用意したものであり，確かに，多面体表示メソッドより高速である．ここで示した数値実験（多面体表示）のうち，テスト形状やスキニング図形のような通常の図形表示は，数秒ないし十数秒で完了するが，その他の場合で，特に大きな半径の超球オフセットが絡む，擬凸包体生成やフィレット操作，図形フィーチャ抽出などでは，十数分のオーダー，場合によってはそれ以上の処理時間を必要とした．これらの場合では，3章で述べた超球探索法にかかわるCPU負荷が大きくなるからである．したがって，本モデルを幾何モデルとして位置付ける場合，その柔軟で広範な図形表現能力は自負できるが，実用的な性能面からいえば，さらに一段の工夫が必要である．しかし，従来のモデルで困難であった図形操作を簡単に実現できたという成果を主張することはできる．現状でも，厳密な意味でのオフセットやフィレット図形などによる精密設計を意図する場合には，本モデルの利用価値は大きいと思われる．一方，本モデルを空間認識・理解モデルと考えた場合には，様相は異なる．この場合には，生成した図形の全体像の精密な情報を必要としないことが多いので，距離場による空間の局所的な認識・理解の機能が一段と効果的となる．今回の実験は，幾何モデルの見地からの検証を主眼にしたので，この点に関して深く踏み込んでいないが，上記の実験結果からもある程度，この考え方に対する裏付けが得られた．

6. おわりに

本研究では，距離尺度モデルの発想の原点に戻りこれを形状モデルとしてはもとより，むしろ将来的には空間モデルとしての特徴を生かした活用を図るために，これを距離場空間モデルと改名し，空間に距離尺度の新しい解釈である距離場を導入して，簡明なオブジェクト指向形式に再構成した．すなわち，距離場空間モデルは，物体ないし物体形状自身を，一般の物理量と同じように空間の場として扱う．それは，距離場とも呼ぶべき場であり，着目する点に関して，対象とする物体の境界に至る距離に関連するベクトル場である．具体的には，距離尺度モデルにおける相対位置データを，距離場空間モデルでは距離場データに対応させ諸概念を精密化させることによって達成した．さらに，このように再構成して得たモデルの基礎を与え，将来の応用展開に対する裏付けとするために新たな図形操作にかかわる汎オフセットの概念を導入し，それが本モデルに特有の概念である超球オフセットや超球フィレット，凸包体などの新しい概念を生むこと，それが今まで困難であった複雑な形状の生成手段として有効であることを理論と実証によって示した．しかし，本モデルを幾何モデルとして位置付ける場合，その柔軟で広範な図形表現能力は自負できるが，実用的な性能面からいえば，さらに一段の工夫が必要である．一方，本モデルを空間認識・理解モデルと考えた場合には，生成した図形の全体像の精密な表示を必要としないことが多いので，距離場による空間の局所的な認識・理解の機能が一段と効果的となる．今回の実験は，幾何モデルの見地からの検証を主眼にしたのでこの点に関して深く踏み込んでいないが，上記の実験結果からもある程度，この考え方に対する裏付けが得られた．

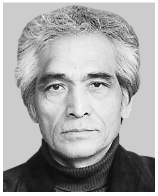
今後の展開の方向は2つある．1つは，幾何モデルとしての展開，特に，超球オフセットを含む汎オフセットの性能向上や，新たな幾何形状の創生を指向した研究であり，他の1つは，加工や組立の工程設計や，機械装置の配置，搬入，据付，ないし搬出の作業設計などに対して本モデル特有の機能，すなわち，空間認識・理解モデルの側面を強調した応用展開を図ることである．

参考文献

1) 徳増，野中，仁尾，原島，松本：距離尺度に基づく形状表現法，情報処理学会論文誌，Vol.39, No.1, pp.50–59 (1998).
2) 野中，川島，徳増：距離尺度モデルに基づく統一的な形状表現法の研究，第6回設計自動化工学講演論文集，pp.31–33 (1988).
3) 野中，川島，徳増：オブジェクト指向型の図形処理法，第37回情報処理学会全国大会論文集（3），2T-8, pp.1677–1678 (1988).
4) Nonaka, S., Tokumasu, S., Kawashima, Y. and Takahashi, K.: A New Geometric Model: Distance Measure Model, *Proc. 15th (ASME) Design Automation Conference on Advances in Design Automation*, Vol.1, pp.135–141 (1989).
5) 杉山，渡邊，巽，徳増：空間表現のための2次元距離尺度モデルの構築，第55回情報処理学会全国大会論文集（4），6AD-6, pp.321–322 (1997).
6) 渡邊，杉山，巽，徳増：2次元距離尺度モデルによるボロノイ/メタボール図形の生成，第55回情報処理学会全国大会論文集（4），6AD-7, pp.323–324 (1997).

7) 田中，舘原，巽，徳増：空間表現のためのオブジェクト指向プログラミング，第 57 回情報処理学会全国大会論文集（4），3N-7, pp.121–122 (1998).
8) 舘原，田中，巽，徳増：オブジェクト表現による複雑な物体形状の生成，第 57 回情報処理学会全国大会論文集（4），3N-8, pp.123–124 (1998).
9) 近藤ほか：逆オフセット法を基にした形状加工処理，精密工学会誌，Vol.54, No.5, pp.168–172 (1988).
10) Hoschek, J.: Spline Approximation of Offset Curves, *Computer Aided Geometric Design 5*, pp.33–40, North Holland (1988).
11) Hunter, G.M.: Efficient Computation and Data Structures for Graphics, PhD. Dissertation, Electrical Engineering and Computer Science Department, Princeton University (1978).

(平成 12 年 1 月 24 日受付)
(平成 12 年 11 月 2 日採録)



徳増　眞司（正会員）
1940 年生．1963 年横浜国立大学工学部卒業.（株）日立製作所日立研究所入社．1973〜74 年米国スタンフォード大学大学院 OR 学科修士課程修了，1984 年工学博士（京都大学），1995 年退社．現在神奈川工科大学情報工学科教授．生産情報システム（CAD/CAM/CAE，CG 等），システム工学，OR，計算幾何学の研究に従事．米国 IEEE，OR 学会，電気学会各会員．

巽　　久行（正会員）
1956 年生．1979 年明治大学工学部卒業．1985 年同大学院工学研究科博士後期課程修了．工学博士．1986 年神奈川工科大学情報工学科助手．明治大学工学部，同経営学部兼任講師等を経て現在に至る．多値論理，ニューラルネットに興味を持つ．電子情報通信学会，日本ファジィ学会，米国 IEEE 各会員．

村井　保之（正会員）
1960 年生．1996 年産能大学経営情報学部卒業．1998 年神奈川工科大学大学院工学研究科博士前期課程修了．現在同大学院工学研究科博士後期課程在学中．知能ロボットの研究に興味を持つ．電子情報通信学会会員．

仁尾　　都（正会員）
1945 年生．1969 年京都大学理学部卒業．工学博士．同年（株）日立製作所に入社．CAD 端末，グラフィックス，3 次元 CAD/CAM，高齢者支援情報システムを研究．現在明星大学情報学部教授．電子情報通信学会，日本健康医学会各会員．