6S−7 アルゴリズムの線形計画法による基礎づけ

中森眞理雄
東京農工大学

1．はじめに

コンピュータサイエンスの基本的問題には，“良い”アルゴリズムが存在することが知られている問題と，“良い”アルゴリズムが知られていない問題とがある．ここで，アルゴリズムの“良さ”とは，計算時間や記憶場所の大きさを問題の規模を表す指標の関数で表したときの関数形のことと，一応，見なしておく．例えば，多項式時間の決定性アルゴリズムが存在する問題のクラスをPと表し，多項式時間の非決定性アルゴリズムが存在する問題のクラスをNPと表す．以上は計算の複雑さの理論で周知のことがらである．

このような計算の複雑さの理論は Turing 機械のモデルで論じられることが多い．

一方，クラスPの問題の多くは線形計画問題として記述できる．逆に，線形計画問題として記述できる問題には良いアルゴリズムが存在することが多い（線形計画問題に対するKarmarkar のアルゴリズムとは異なる意味で）．そこで，本稿では，整列問題のアルゴリズムを例に，線形計画問題の立場からコンピュータサイエンスの問題を眺め，計算の複雑さに新たな視点を提供することを試みる．

2．整列アルゴリズムと線形計画問題

複数個の数値の中の最大値や最小値を求めたりそれらを整列したりする問題を線形計画問題として記述してみる．

2．1 最大値（最小値）

数値a_1，a_2，…，a_nが与えられたとき，これらの中の最大値を求める問題は，線形計画問題として次のように記述される．

［問題π 1］

制約条件： $\Sigma_i x_i \leqq 1$，
$x_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$

目的関数： $z = \Sigma_i a_i x_i \rightarrow$ 最大化

問題π 1の双対問題は次の通りである．

［問題δ 1］

制約条件： $w \geqq a_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$

目的関数： $w \rightarrow$ 最小化

同様に，数値a_1，a_2，…，a_nの最小値を求める問題は，次のように記述される．

［問題π 2］

制約条件： $\Sigma_i u_i \geqq 1$，
$u_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$

目的関数： $t = \Sigma_i a_i u_i \rightarrow$ 最小化

［問題δ 2］

制約条件： $v \leqq a_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$

目的関数： $v \rightarrow$ 最大化

2．2 大きい方（小さい方）からk個のものの和

数値a_1，a_2，…，a_nが与えられたとき，大きい方からk個のものの和を求める問題は，線形計画問題として次のように記述される．

［問題π 3］

制約条件： $\Sigma_i x_i \leqq k$，
$x_i \leqq 1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，
$x_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$

目的関数： $z = \Sigma_i a_i x_i \rightarrow$ 最大化

問題π 3の双対問題は次の通りである．

［問題δ 3］

制約条件：
$y_0 + y_i \geqq a_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，
$y_i \geqq 0$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$

目的関数： $z = k y_0 + \Sigma_i y_i \rightarrow$ 最小化

同様に，数値a_1，a_2，…，a_nの小さい方からℓ個のものの和を求める問題は，線形計画問題として次のように記述される．

Foundations of Algorithms by Linear Programming

Mario NAKAMORI
Department of Computer Science, Tokyo University of Agriculture and Technology

［問題π 4］

制約条件：　$\Sigma_i u_i \geq \ell$,

$u_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$,

$u_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$

目的関数：　$t = \Sigma_i a_i u_i$ → 最小化

［問題δ 4］

制約条件：

$y_0 - y_i \leq a_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$,

$y_i \geq 0 \quad (i=0, 1, 2, \cdots, n)$

目的関数：　$v = k y_0 - \Sigma_i y_i$ → 最小化

2．3　大きい方からk番目のもの

数値 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が与えられたとき，大きい方からk番目のものは，大きい方からk個のものの和と小さい方からn－k＋1個のものの和の両方に含まれるので，両者の和から $a_1+a_2+\cdots+a_n$ を減じたものに等しい．したがって，線形計画問題として次のように記述される．

［問題π 5］

制約条件：　$\Sigma_i x_i \leq k$,

$x_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$,

$x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$,

$\Sigma_i u_i \geq n-k+1$,

$u_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$,

$u_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$

目的関数：

$h = \Sigma_i a_i x_i - \Sigma_i a_i u_i - \Sigma_i a_i$

→ 最大化

2．4　整列

数値 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が与えられたとき，これらを大きい方から順に並べる問題（整列あるいはソート）は，線形計画問題として次のように記述される．

［問題π 6］

制約条件：　$\Sigma_i x_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, \cdots, n)$,

$\Sigma_j x_{ij} = 1 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$,

$x_{ij} \geq 0$

$(i, j=1, 2, \cdots, n)$

目的関数：　$z = \Sigma_i \Sigma_j a_i j x_{ij}$ → 最小化

問題π 6の双対問題は次の通りである．

［問題δ 6］

制約条件：　$q_j + y_i \leq j a_i$

$(i, j=1, 2, \cdots, n)$

目的関数：　$w = \Sigma_i y_i + \Sigma_j q_j$ → 最大化

数値 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を小さい方から順に並べる問題は，次のように記述される．

［問題π 7］

制約条件：　$\Sigma_i u_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, \cdots, n)$,

$\Sigma_j u_{ij} = 1 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$,

$u_{ij} \geq 0$

$(i, j=1, 2, \cdots, n)$

目的関数：　$t = \Sigma_i \Sigma_j a_i j u_{ij}$ → 最大化

問題π 7の双対問題は次の通りである．

［問題δ 7］

制約条件：　$p_j + s_i \leq j a_i$

$(i, j=1, 2, \cdots, n)$

目的関数：　$v = \Sigma_i s_i + \Sigma_j p_j$ → 最小化

問題π 6（問題π 7）において変数 x_{ij}（変数 u_{ij}）は，a_i が $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が大きい方からj番目のときに1でその他のときに0をとる．問題π 6（問題π 7）が整列問題であることは，一般に $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$，$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ のとき，1，2，…，nのいかなる順列p（1），p（2），…，p（n）に対しても，

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$$
$$\leq a_1 b_{p(1)} + a_2 b_{p(2)} + \cdots + a_n b_{p(n)}$$
$$\leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

であることから分かる．

3．おわりに

以上のように，整列問題は線形計画問題として記述できることがわかった．整列問題に能率の良いアルゴリズムが存在するのは，このためである．今後の課題として，他の問題についても同種のことがらを調べ，解法の容易性と線形計画問題としての記述の容易性との間の関係を調べたいと考えている．

参考文献

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, 1974.

[2] G. B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton Univ. Press, 1963.