5S−9

ファジィ言語論理とその代数的構造

高 元伸　　向殿 政男
明治大学理工学部情報科学科

1 はじめに

閉区間［0,1］上のファジィ集合をとるファジィ言語論理において、真理値として正規で凸からなる真理値の集合と論理演算子AND,OR,NOTからなる代数系はド・モルガン束をなすことが知られている.本稿では数値真理値を含む場合"正規で凸"という条件がド・モルガン束をなすための必要条件でもあることを示す.

2 諸定義

本稿で取り扱う真理値は以下のものである.

定義2.1　ファジィ真理値

メンバーシップ関数μAにより特徴づけられる閉区間[0, 1]上のファジィ集合をファジィ真理値と呼び，その集合を記号Vで表す.

$$A=\int \mu A(x)/x \quad (x\in[0,1])$$
$$\mu A : [0,1]\to[0,1]$$

定義2.2　数値真理値

ファジィ真理値A（∈V）のうち，そのメンバーシップ関数μAが以下のような関数で表現されるものを数値真理値と呼び，その集合をV_Rで表す.

$$\mu A(x)=\begin{cases}1 & x=a\ (\in[0,1])\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

定義2.3　正規

以下のような真理値Aを正規（Normal）と呼び，その集合をV_Nで表す.

$$\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\mu A(\alpha)=1 \qquad \alpha\in[0,1]$$

定義2.4　凸（Convex）

以下のような真理値を凸（Convex）であるといいその集合をV_Cで表す.

$x_j\leqq x_i\leqq x_l$なるすべてのx_j, x_i, x_lについて

$$\mu A(x_i)\geqq\min(\mu A(x_j),\mu A(x_l))$$

定義された集合は以下の関係を満足する.

$$V_R\subseteq V_N\subseteq V$$
$$V_R\subseteq V_C\subseteq V$$

定義2.5　演算子

論理積（AND）

$$A\sqcap B=\int \mu A(x)\wedge\mu B(y)/x\wedge y \quad (x,y\in[0,1])$$

論理和（OR）

$$A\sqcup B=\int \mu A(x)\wedge\mu B(y)/x\vee y \quad (x,y\in[0,1])$$

論理否定（NOT）

$$\neg A=\int \mu A(1-x)/x =\int \mu A(x)/1-x \quad (x\in[0,1])$$

ただし，∧,∨は，それぞれmin,max演算を意味する.

補題2.1

真理値集合V, V_N, V_C, V_R及び（$V_N\cap V_C$）はそれぞれ演算子⊓, ⊔, ¬について閉じている.

（証明略）

3 代数系が満たす基本的な公式

ファジィ真理値の集合Vと演算子⊓, ⊔, ¬からなる代数系はド・モルガン束の基本公式のうち吸収律，分配律を除き以下の全ての式を満足する．（よって束はなさない）

（1） $A\vee B=B\vee A$, $A\wedge B=B\wedge A$ （交換律）

（2） $A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C$
$A\vee(B\vee C)=(A\vee B)\vee C$ （結合律）

（3） $A\wedge A=A$, $A\vee A=A$ （べき等律）

（4） $\neg(\neg A)=A$ （復帰律）

（5） $\neg(A\wedge B)=\neg A\vee\neg B$
$\neg(A\vee B)=\neg A\wedge\neg B$ （ド・モルガン律）

4 吸収律を満たす条件

吸収律を満たすことは以下の式を満足することである.

$$\forall\alpha \quad \mu A\sqcup(A\sqcap B)(\alpha)=\mu A(\alpha)$$

この式が成立する必要十分条件とは

$$\forall\alpha \quad \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\mu A(\alpha)\leqq\bigvee_{\beta\in[0,1]}\mu B(\beta)$$

かつ

$$\min[\bigvee_{\gamma\in[0,\alpha]}\mu A(\gamma),\ \bigvee_{\varepsilon\in[\alpha,1]}\mu A(\varepsilon)]\geqq\mu B(\alpha)$$

補題4.1

任意の正規かつ凸でない真理値を吸収律の反例とさせるような数値真理値は少なくとも1つ存在する.

この条件と，数値真理値A（∈V_R）において

$$\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\mu A(\alpha)=1$$

であることにより，以下のことがいえる.

定理4.1

数値真理値V_Rを含むファジィ真理値の集合V'において，演算子⊓, ⊔, ¬について閉じているとすれば，V'において吸収律が成立するための必要十分条件は$V'\subseteq(V_N\cap V_C)$（正規かつ凸）である.（証明略）

5 分配律を満たす条件

まず，分配律の十分条件について述べる．あるαに対する真理値のα−レベル集合を以下のように表す.

$$\mu' A(x)=\bigcup[a1l,\ a2l] \quad l=1,2,3,\cdots$$

ただし　$a1l\leqq a2l<a1l{+}1\leqq a2l{+}1$

同様に

$$\mu' B(x)=\bigcup_m[b1m,\ b2m] \quad m=1,2,3,\cdots$$
$$\mu' C(x)=\bigcup_n[c1n,\ c2n] \quad n=1,2,3,\cdots$$

Algebraic Structure of Truth Values in Fuzzy Linguistic Valued Logic

Motonobu KOH　Masao MUKAIDONO
Department of Computer Science, Meiji University

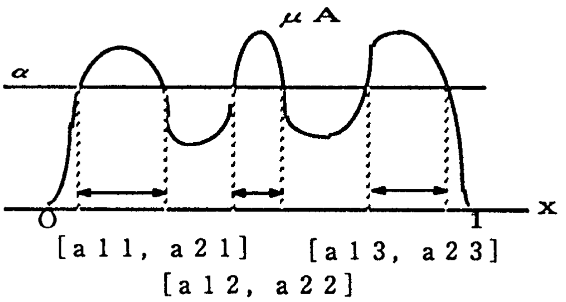

図1　α−レベル集合

いま分配律

$\mu A\vee(B\wedge C)(x)=\mu(A\vee B)\wedge(A\vee C)(x)$ より，左辺のレベル集合は以下のようになる．

$\mu' A\vee(B\wedge C)(x)$

$$=\bigcup_{l}\bigcup_{m}\bigcup_{n}[a_{1l}\vee(b_{1m}\wedge c_{1n}),\ a_{2l}\vee(b_{2m}\wedge c_{2n})]$$

一方，右辺のレベル集合は次のようになる．

$\mu'(A\vee B)\wedge(A\vee C)(x)$

$$=\bigcup_{l}\bigcup_{l'}\bigcup_{m}\bigcup_{n}[(a_{1l}\vee b_{1m})\wedge(a_{1l'}\vee c_{1n}),\ (a_{2l}\vee b_{2m})\wedge(a_{2l'}\vee c_{2n})]$$

ここで，

$\mu' A(x)=[a_{11},\ a_{21}]\quad(l=1)$

と仮定する．(レベル集合の要素が1つだけと仮定する．)

左辺 $=\mu' A\vee(B\wedge C)(x)$

$$=\bigcup_{m}\bigcup_{n}[a_{11}\vee(b_{1m}\wedge c_{1n}),\ a_{21}\vee(b_{2m}\wedge c_{2n})]$$

$$=\bigcup_{m}\bigcup_{n}[(a_{11}\vee b_{1m})\wedge(a_{11}\vee c_{1n}),\ (a_{21}\vee b_{2m})\wedge(a_{21}\vee c_{2n})]$$

$=\mu'(A\vee B)\wedge(A\vee C)(x)=$ 右辺

となり，α-レベル集合において分配律は成立する．

補題5.1

以下の条件は分配律　$\mu' A\vee(B\wedge C)(x)=\mu'(A\vee B)\wedge(A\vee C)(x)$ が成立するための十分条件である．

$\forall\alpha\quad \mu' A(x)=[a_{11},\ a_{21}]\quad(l=1)$

i.e.

$x_j\leq x_i\leq x_l$ なるすべての x_j, x_i, x_l について

$\mu A(x_i)\geq\min(\mu A(x_j),\mu A(x_l))$

(凸 (convex))

つぎに，特別な場合として，数値真理値 V_R を含むことを条件に加えると補題5.1は必要条件になる．

定理5.1

数値真理値 V_R を含むファジィ真理値の集合V' が演算子 ⊓，⊔，¬ について閉じているとする．この時V' において分配律が成立する必要十分条件は以下の式である．

$V'\subseteq V_C$　(凸 (convex))

証明　十分条件は明か．必要条件であることは，次の補題により得られる．

補題5.2

凸 (convex) でない任意の真理値Aと数値真理値B，Cから分配律の反例が少なくとも1つ得られる．

証明

凸 (convex) でない真理値Aと数値真理値B，C ($\in V_R$) を以下のように仮定する．

$\mu' A(x)=\bigcup_{l}[a_{1l},\ a_{2l}]\quad l=1,2,3,\cdots$

$\mu' B(x)=[b,\ b]\qquad \mu' C(x)=[c,c]$

ただし

$0\leq a_{1l}\leq c\leq a_{2l}<b<a_{1l+1}\leq a_{2l+1}$

(この条件を満たすB，Cは必ず存在する．)

このとき，

$\mu'(A\vee B)\wedge(A\vee C)(x)$

$\ni[(a_{1l}\vee b)\wedge(a_{1l+1}\vee c),\ (a_{2l}\vee b)\wedge(a_{2l+1}\vee c)]$

$=[b,\ b]$

ここで $\mu' A\vee(B\wedge C)(x)\not\ni[b,\ b]$ を示す．

もし $\mu' A\vee(B\wedge C)(x)\ni[b,\ b]$ ならば以下の関係式を満足する $a_{1l'}$，$a_{2l'}$ の組を与える l' が必ず存在する．

$a_{1l'}\vee(b\wedge c)\leq b\leq a_{2l'}\vee(b\wedge c)$

この式を変形すると，以下の関係が得られる．

$c<b$ より

$a_{1l'}\vee c\leq b\leq a_{2l'}\vee c$

$a_{1l'}\leq b\leq a_{2l'}$

よって仮定により，このような関係を満たす $a_{1l'}$，$a_{2l'}$ の組を与える l' は存在しない．

よって $\mu' A\vee(B\wedge C)(x)\not\ni[b,\ b]$ を得る(Q.E.D)

6　ド・モルガン束

定理4.1と定理5.1より，以下のことがいえる．

定理6.1

数値真理値集合 V_R を含むファジィ真理値の集合V' と演算子 ⊓，⊔，¬ からなる代数系がド・モルガン束をなすための必要十分条件は以下の関係式である．

$V'\subseteq(V_N\cap V_C)$

(証明略)

定理6.1から，正規で凸である真理値からなる集合は，演算について閉じていれば必ずド・モルガン束をなすことがいえる．また補題5.2より正規で凸である真理値の全体集合 $(V_N\cap V_C)$ が，数値真理値集合を含みかつド・モルガン束をなす最大の集合であることがいえる．

7　まとめ

数値真理値全てを含むファジィ真理値集合において，正規かつ凸であることがその代数系においてド・モルガン束をなす必要条件であることを示した．工学的意味においても，正規であることは少なくとも真理値が1になる要素を持つことを意味する．また凸であることは分離された2値以上真理値を持ち得ないことを意味する．このことからも"正規で凸"というシンプルな条件でド・モルガン束をなす条件になることは，きわめて興味深い．

参考文献

(1) 向殿政男："Fuzzy論理関数の代数的構造とその最簡形式および規約形式"，信学論, vol.58-D, NO.12 (1975)

(2) 水本雅晴："Fuzzy論理と近似的推論"，ファジィ理論への道,別冊『数理科学』,サイエンス社

(3) 向殿政男，菊池浩明："ファジィインターバル論理の提案"，日本ファジィ学会誌,vol.2,NO.2(1990)

(4) 高元伸，向殿政男："ファジィ論理における真理値の数学的構造について"，電子情報通信学会,多値技報,vol.MVL-91，NO.2 (1991)