確率付グラフ上の点素なs-t路の最大本数の期待値計算問題

5S−5

程　鵬*　　増山　繁*
cheng@toki.tutkie.tut.ac.jp, masuyama@tutkie.tut.ac.jp
* 豊橋技術科学大学知識情報工学系

1 はじめに

グラフに対して、指定された2節点間の点素な路の最大本数を効率良く求めるアルゴリズムがいくつか知られている[1]。但し、そこでは、グラフの節点が故障しないことが仮定されている。これに対して、節点の故障確率を考慮するグラフにおいては、どの節点が故障するかによって指定された2節点間の点素な路の最大本数は変わるが、その期待値(即ち、平均値)が存在する。本稿では、その期待値を計算する問題は、グラフがs-t出入双木あるいは平面グラフであるとき、NP困難であることを示す。また、その期待値が効率良く求まるグラフをいくつか与える。

2 準備

有向グラフ $G=(V,A,s,t)$ を考える。ここで、V は有限個の節点の集合であり、$A\subseteq V\times V$ は有向枝の集合と呼ばれる。$s,t(s\neq t)$ はそれぞれソース(source)、シンク(sink)と呼ばれる V の2つの指定された節点である。以下、グラフに関する概念と記号は文献[1,2]に従う。

グラフ $G=(V,A,s,t)$ において、節点の部分集合 $S\subseteq V$ のすべての節点とその節点に接続するすべての枝を除去したグラフを $G-S$ と記す。G の中でお互いに共通の節点を持たないs-t路を点素なs-t路と呼ぶが、与えられた G の点素なs-t路の最大本数を $\kappa_{st}(G)$ と記す。

グラフ $G=(V,A,s,t)$ を条件:

$$V_1\cup V_2=V,\ V_1\cap V_2=\phi$$
$$A-(A_1\cup A_2)\subseteq V_1\times V_2 \qquad (1)$$

を満たす $T_{O(s)}=(V_1,A_1), T_{I(t)}=(V_2,A_2)$ に分離できるとき、G をs-t出入双木(s-t Out-In Bitree)と呼ぶ。ここで、$T_{O(s)}, T_{I(t)}$ はそれぞれ根 s から有向出木と根 t へ有向入木を表す。条件(1)と有向木の性質を用いてs-t出入双木が閉路を持たないことを容易に導くことができる。

3 s-t線グラフ

グラフ $G=(V,A,s,t)$ に対し、次のグラフ $L_{st}(G)=(V_L,A_L,s,t)$ をs-t線グラフ(s-t Line Digraph)と呼ぶ。

但し、　$V_L=\{s,t\}\cup\{u_a\mid a\in A\}$,

$$\begin{aligned}A_L &= \{(u_{a'},u_{a''})\mid a'=(u,v),a''=(v,w)\in A,\\ &\qquad v\in V-\{s,t\}\ \}\\ &\quad\cup\{(u_{a'},s)\mid a'=(v,s)\}\cup\{(s,u_{a'})\mid a'=(s,v)\}\\ &\quad\cup\{(u_{a'},t)\mid a'=(v,t)\}\cup\{(t,u_{a'})\mid a'=(t,v)\}.\end{aligned}$$

$L_{st}(G)$ の定義によって、次の補題が証明できる。

(補題1) グラフ $G=(V,A,s,t)$ に対し、

(i). G の枝の部分集合 $U(\subseteq A)$ に対し、U の各枝に対応する $L_{st}(G)$ の節点の集合を S_U とすると、$L_{st}(G-U)=L_{st}(G)-S_U$ が成り立つ。

(ii). G が閉路をもたないとき、$\lambda_{st}(G)=\kappa_{st}(L_{st}(G))$ が成り立つ。但し、$\lambda_{st}(G)$ は G の辺素なs-t路の最大本数である。

(iii). G が次数が3より大きな節点を持たない平面グラフであるとき、$L_{st}(G)$ は平面グラフである。

(iv). G がs-t出入双木であるとき、$L_{st}(G)$ もs-t出入双木である。□

4 点素なs-t路の期待最大本数

s,t 以外の節点の故障確率のベクトル $p_V(0\leq p_V(v)<1, v\in V-\{s,t\})$ を与えるグラフ $G=(V,A,s,t)$ を節点への確率付グラフと呼び、(G,p_V) と記す。ここで各節点の故障が独立に生起し、節点の故障が生じるとき節点が完全に切断し、かつ、枝は故障しないと仮定する。以下では、簡単のため、$V-\{s,t\}$ を V_{-st} とする。

4.1 定義

節点への確率付グラフ (G,p_V) において、節点 v は故障しているか、していないかの2つの状態がある。$S(\subseteq V_{-st})$ に属するすべての節点が故障し、かつ、それ以外のすべての節点が故障していないという故障状態に対応する G の部分グラフを $G-S$ とする。各節点の故障が独立に生起するという仮定より、$G-S$ の生起確率 $\psi(G-S)$ は

$$\psi(G-S)\equiv\prod_{v\in S}p_V(v)\prod_{v\in V_{-st}-S}(1-p_V(v))$$

となる。明らかに、$\sum_{S\subseteq V_{-st}}\psi(G-S)=1$ となる。(G,p_V) の各故障状態 $S(\subseteq V_{-st})$ における $G-S$ の点素なs-t路の最大本数 $\kappa_{st}(G-S)$ とその $G-S$ の生起確率 $\psi(G-S)$ の積の総和を点素なs-t路の最大本数の期待値 $\Psi(G,p_V)$ と呼び、次式

$$\Psi(G,p_V)\equiv\sum_{S\subseteq V_{-st}}\kappa_{st}(G-S)\psi(G-S)$$

で定義する。また、節点の故障のかわりに枝の故障を考慮する枝への確率付グラフ (G,p_A) 上の辺素なs-t路の最大本数の期待値 $\Gamma(G,p_A)$ が知られている[2]。

点素なs-t路の最大本数の期待値の計算問題と辺素なs-t路の最大本数の期待値の計算問題の関係については、グラフとそのs-t線グラフの対応関係、補題1(i),(ii)を用いて、次の定理が成り立つ。

Computing the Expected Maximum Number of Vertex-disjoint s-t Paths on Probabilistic Graph
Peng CHENG*, Shigeru MASUYAMA*
*Toyohashi Univ. of Tech

(定理1) 閉路を持たないグラフ G において、枝への確率付グラフ (G, p_A) に対応する節点への確率付グラフ $(L_{st}(G), p_V)$ を作る。但し、$p_A(a) = p_V(u_a), a \in A$。すると、$\Gamma(G, p_A) = \Psi(L_{st}(G), p_V)$ が成り立つ。□

4.2 計算複雑度

G が各節点の次数が3以下、かつ、閉路を持たない平面グラフ、あるいは、s-t 出入双木であるとき、任意の枝の故障確率ベクトル p_A に対し、$\Gamma(G, p_A)$ の計算問題は NP 困難であることが知られているが[2]、補題 1(iii),(iv) 及び定理1によって、次の定理を得る。

(定理2) 任意の故障確率ベクトル p_V において、次の場合に対し、$\Psi(G, p_V)$ の計算問題は NP 困難である。
(i). G が平面グラフ。(ii). G が s-t 出入双木。□

4.3 多項式時間で計算できるグラフ

この節では、節点への確率付グラフ上の $\Psi(G, p_V)$ が G のサイズに関する多項式時間で求まるグラフを示す。

グラフ $G = (V, A, s, t)$ が条件:

$$V_{-st} = \cup_{i=1}^{k} V_i,\ V_i \cap V_{i+1} = \phi,\ i = 1, \dots, k-1,$$

$$A = \cup_{i=0}^{k} V_i \times V_{i+1},\ V_0 = \{s\},\ V_{k+1} = \{t\}$$

を満たすとき G を s-t 完全 k 組グラフ (Complete k-Partite Digraph) と呼ぶ。明らかに、$L_{st}(G)$ の定義によって、s-t 直列グラフ G に対応する $L_{st}(G)$ は s-t 完全 k 組グラフである (図1を参照)。

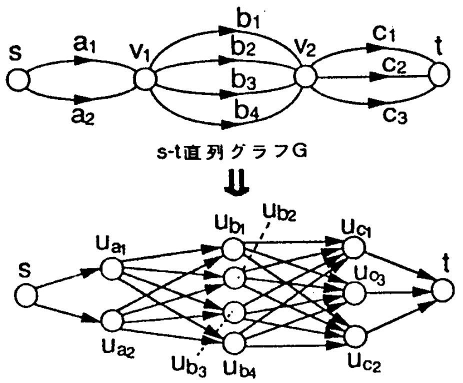

図1. s-t完全k組グラフLst(G)

G が s-t 直列グラフであり、かつ、各枝の故障確率が等しい枝への確率付グラフ上の $\Gamma(G, p_A)$ が $O(|A|^3)$ 時間で求まることが知られているが[2]、s-t 直列グラフが閉路を持たないこと及び G の枝数は $L_{st}(G)$ の節点数 -2 と等しいから、定理1によって、次の定理を得る。

(定理3) s-t 完全 k 組グラフ G において、各節点の故障確率が等しいベクトル p_V に対し、$\Psi(G, p_V)$ を $O(|V|^3)$ 時間で求めることができる。□

以下では、s-t 直並列グラフ G において、任意の節点の故障確率ベクトル p_V に対し、$\Psi(G, p_V)$ が $O(|A|+|V|)$ 時間で求まることを示す。そのために、グラフ G に対して次の操作 P_{st} を行なって得たグラフを $P_{st}(G)$ と記す。

操作 P_{st}: グラフ G の s, t 以外のすべての節点 v に対し、
(i). v に対し、2つの節点 v', v'' を作る。
(ii). v が終点となるすべての枝 (u, v) を枝 (u, v') に更新する。同様に、v が始点となるすべての枝 (v, w) を枝 (v'', w) に更新する。
(iii). 枝 $a_v = (v', v'')$ を作る。そして、節点 v を除去する。

s-t 直並列グラフ G が s-t 切断点を持ち、かつ、お互いに共通の節点が s, t のみである幾つかの G の部分 s-t 直並列グラフ $G_1, G_2, \dots, G_h$ に分解できる。各 G_i に対し、G_i が s-t 切断点を持つことおよび操作 P_{st} より、$P_{st}(G_i)$ は最小 s-t カットの位数が1である s-t 直並列グラフである。$P_{st}(G_1), \dots, P_{st}(G_h)$ から並列結合によって得たグラフは $P_{st}(G)$ であり、単一分解可能 s-t 直並列グラフである (図2を参照)。また、$P_{st}(G)$ の枝数は $|A| + |V|$ であること、及び、単一分解可能 s-t 直並列グラフ G において、任意の枝の故障確率ベクトル p_A に対し、$\Gamma(G, p_A)$ が $O(|A|)$ 時間で求まることによって[2]、次の定理を得る。

(定理4) s-t 直並列グラフ G において、任意の節点の故障確率ベクトル p_V に対し、$\Psi(G, p_V)$ が $O(|A| + |V|)$ 時間で求まる。□

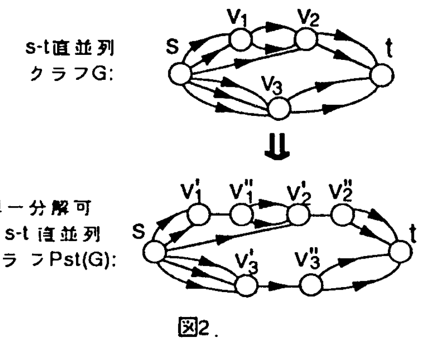

図2.

5 むすび

本稿では、これまでにあまり研究されていない各節点に故障確率が与えられたグラフ上の点素な s-t 路の最大本数の期待値を計算する問題を考えた。本研究の結果より、この計算問題をグラフのサイズの多項式時間で解ける場合はかなり限られている。従って、その近似解を求める効率の良い計算法の開発が今後の課題として考えられる。

参考文献

[1] F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, mass., 1969. [池田訳, グラフ理論, 共立出版, 1971.]

[2] 程, 増山:“確率付グラフ上の辺素な s-t 路の最大本数の期待値計算問題の計算量について”, 信学技報, COMP91-83, pp.53-61(1991-12).