シンプレクティック・レイトレーシング：ブラックホール時空での光線追跡

佐藤　哲[†]　岩佐英彦[††]
竹村治雄[†]　横矢直和[†]

本論文では，ハミルトンの正準方程式を解くことで光線の軌道を計算し，ブラックホール周囲の光景を可視化するシンプレクティック・レイトレーシング法を提案する．従来手法では測地線の微分方程式を数値的に解いて光線の軌道を計算し，レイトレーシング法に基づいてブラックホールを可視化していた．しかし従来研究の中では，可視化結果の正当性に関する議論は行われていなかった．本論文では従来手法において理論的に発生する誤差を指摘し，その問題を解決するシンプレクティック・レイトレーシングを提案する．シンプレクティク・レイトレーシングでは，ハミルトン力学を用いて相対論的な光線の軌道を表す方程式を記述し，方程式をシンプレクティック数値解析法を用いて解いて光線追跡と交差判定を行う．提案手法を用いてブラックホール近傍の情景を描画し，従来手法との計算精度比較をした結果，シンプレクティック・レイトレーシングは結果の正確さの面で優位性があることが分かった．

Symplectic Raytracing: Raytracing in Blackhole Spacetime

Tetsu Satoh,[†] Hidehiko Iwasa,[††] Haruo Takemura[†]
and Naokazu Yokoya[†]

This paper proposes a method of symplectic raytracing which visualizes a sight in the vicinity of the blackhole by solving Hamilton canonical equations. Conventional methods for visualizing the blackhole solve geodesic equations numerically to calculate orbits of the rays and visualize the blackhole in accordance with a raytracing method. In past studies of blackhole visualization, correctness of the visualization results was not discussed. In this paper, we first point out theoretical errors in conventional methods and propose the symplectic raytracing which solves the problem of those methods. Symplectic raytracing describes equations of orbits of the ray by using Hamiltonian dynamics and solves the equations by using symplectic integrators for raytracing. Several images generated by the proposed method are shown and correctness of the calculation results is compared with the conventional method. Experimental results show the superiority of symplectic raytracing to the conventional method in terms of the accuracy of results.

1. はじめに

現代物理学においても先端的な話題であるブラックホール[1)]は，その神秘的な名称や特徴のある性質から専門家に限らず一般の人々の関心も高い．しかし，ブラックホールを理解するためには難解な一般相対論を学ばねばならず，物理学を専門としない人にとっては負担が大きい．近年，可視化技術の発展により，ブラックホールが存在する光景のコンピュータグラフィックス（CG）画像を正確に作成して視覚に訴えることにより，専門家でない人でもブラックホールの振舞いや性質を直感的に理解することが可能となってきた[2)]．

このような目的のためのブラックホールの可視化研究は，山下の手法[3)]が提案されて以来，重力場光線追跡法あるいはブラックホールのレイトレーシングと呼ばれて研究されてきた[4),5)]．重力場光線追跡法は，一般に広く使われている CG 作成技法であるレイトレーシング法[6)]を拡張したもので，直進する光線に限らず，ブラックホールの影響を受けて曲進する光線の軌道を計算して追跡し，CG 画像を生成するものである．光線の軌道を計算する方法としては，測地線の微分方程

† 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科
Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology
†† 株式会社ネットシステムズ
Net Systems, Inc.

式を Runge-Kutta 法[7]などで数値的に解くのが一般的である．しかし数値シミュレーションでは，数値解析法の種類によって程度は異なるものの，必ず計算の過程で打ち切り誤差が発生する．ブラックホールの可視化のためには，宇宙空間における光線の軌道を長時間にわたって追跡しなければならないため，誤差の蓄積が可視化結果に影響を与え，理論に忠実でない画像を作成してしまう可能性がある．

そこで本論文では，測地線の微分方程式を解くのではなく，光線の運動に関する情報を含むハミルトニアンと呼ばれる物理量を使うハミルトンの正準方程式を解くことによって光線の軌道を計算するシンプレクティック・レイトレーシング法を提案する．シンプレクティック数値解析[8]を用いることによってハミルトンの正準方程式を蓄積誤差を発生させずに数値的に解くことが可能となるので，提案手法はその性質を利用し相対論に忠実にブラックホールを可視化する．ただしシンプレクティック・レイトレーシングを用いるためには可視化対象とするブラックホールに対するハミルトニアンが必要となる．本論文では従来研究において可視化例が報告されているいくつかのブラックホールに対するハミルトニアンを示し，それらを用いた可視化例を示す．

2. ブラックホールの可視化

ブラックホールの可視化手法においては，ブラックホールが時空を歪ませるという性質に着目して，ブラックホールが存在する時空にいくつかのオブジェクトを配置し，そのオブジェクトがどのように歪んで観測されるかによって，間接的にブラックホールを表現する手法が一般的である[3]．そして観測画像の作成には，物体から発せられた光線がどのように観測者の視点に入るかを調べるレイトレーシング法が採用される．ただし，光線の運動は時間反転に対し不変なので，実際にはブラックホールの可視化には視点から光線を発射する視線追跡法を使用する．一般相対論によると，ブラックホールの存在は時空を歪ませる．その影響で，地球上では直進する性質のある光線も，曲進することがある．そのため，ブラックホールの可視化には通常のレイトレーシング法をそのまま適用することはできず，曲進する光線の動きを計算して追跡するように拡張する必要がある[9]．

従来のブラックホールの可視化研究においては，光線の軌道は直線の概念を拡張した微分幾何学の概念である測地線の微分方程式を解くことによって計算される．測地線の微分方程式である 2 階の非線形微分方程式は，Runge-Kutta 型の数値解法などによって解くことができるが，計算速度を上げるために差分の刻み幅を大きくすると数値計算の誤差が大きくなる．そして刻み幅を小さくすると打ち切り誤差は小さくなり真の解に近づくが，それでも計算時間が増加するに従って計算機の数値の内部表現の影響で丸め誤差が蓄積されるという問題がある[10]．この問題は，Runge-Kutta 法に限らず測地線の微分方程式を計算する限り必ず発生する．ブラックホール近傍のように時空の歪みが急激に変化するような場合，光線を追跡していると，わずかな計算誤差によって光線が理論とは大きく異なる方向に進んでしまうことが十分考えられ，このような手法では作成された CG 画像の信頼性が失われてしまう．

本論文では，これまで可視化対象とされてきたブラックホール時空での光線の運動は，測地線の方程式でなくともハミルトンの正準方程式によって記述可能であるという点に注目する．ハミルトンの正準方程式は，ハミルトニアンを微分することによって構成される 1 階の微分方程式である．ハミルトンの正準方程式を用いることの利点は，ハミルトンの正準方程式に対しては誤差を蓄積させない解法であるシンプレクティック数値解析[11]が存在する点である．すなわち，ブラックホール時空での光線の軌道を表すことのできるハミルトニアンを導き，ハミルトンの正準方程式をシンプレクティック数値解析を使って解いて光線の運動を計算し，その結果をレンダリングすることによって蓄積誤差を出さずにブラックホールを可視化することができる．本論文ではこの手法をシンプレクティック・レイトレーシング法と呼び，次章以降にて説明する．

3. ハミルトン力学とシンプレクティック数値解析

本章では，シンプレクティック・レイトレーシングの基礎となるハミルトン力学[12]とシンプレクティック数値解析について述べる．ハミルトン力学では，位置を示すために通常の $x-y-z$ 座標系を用いる必要はなく，極座標系 (r, θ, ϕ) を用いても，ある地点からの距離 (s, l, p) を用いてもかまわないので，これらをまとめて一般化座標 q_i $(1 \leq i \leq n)$ として扱う．座標成分に対応する運動量は p_i $(1 \leq i \leq n)$ とする．ここで，n は運動を考える空間の次元数である．ハミルトン力学は，この (p_i, q_i) を用いた $2n$ 個の成分より構成される $2n$ 次元の位相空間内で物体の運動を捉えるのが特徴である．

ハミルトン力学においてニュートンの運動方程式に

対応する基礎方程式は，次のハミルトンの正準方程式である．

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \tag{1}$$

ここで H はハミルトニアンと呼ばれるスカラー関数で，p_j, q_j $(1 \le j \le n)$，および時間 t の関数である．

式 (1) より分かるように，物体の時間変化による運動はすべてハミルトニアン H によって決まる．物理的にはハミルトニアン H は系全体のエネルギーを意味する．しかし，任意の位相空間を用いることができるため，ある運動を記述するハミルトニアンが一意に決まるわけではない．

ハミルトンの正準方程式に対しては，シンプレクティック数値解析という有効な数値解析法が存在することが知られている[8)]．シンプレクティック数値解析は，次式のように外微分形式と外積を用いて定義されるシンプレクティック性の保存を保証する手法である．

$$\begin{aligned} &\sum dp_i(t) \wedge dq_i(t) \\ &\quad = \sum dp_i(t+\Delta t) \wedge dq_i(t+\Delta t). \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，$\wedge$ は外積を表す．この定義の意味は，ハミルトンの正準方程式 (1) の時間発展

$$(q(t), p(t)) \to (q(t+\Delta t), q(t+\Delta t)) \tag{3}$$

に対し，エネルギーが一定の物理現象については，数値解析上もエネルギーを一定に保つということである．逆にいうと，たとえば Runge-Kutta 法のような通常用いられる数値計算手法ではシンプレクティック性を保存しないので，エネルギーが一定であるべき現象の数値解析をしても，エネルギーが無限に増大したり減少したりするなどの現象が理論的に必ず起こりうる．Runge-Kutta 法などの場合，一般に

$$\begin{aligned} &\sum dp_i(t) \wedge dq_i(t) \\ &\quad = \sum C dp_i(t+\Delta t) \wedge dq_i(t+\Delta t) \end{aligned} \tag{4}$$

となり，$2n$ 次元位相空間内での面積素 $dp \wedge dq$ が C 倍になる．この C は，数値解法の打ち切り誤差のオーダーによって決まる定数である．この結果はリュウビルの体積不変の定理[12)]に反することを意味し，物理法則に対し忠実な結果を表さないことを意味する．

シンプレクティック性を保存する数値解析法は，特に周期解を持つハミルトン系，たとえば太陽系の惑星の数十億年にも及ぶ長期シミュレーションなどには欠かせない技術となっており，本論文で示すとおり周期解を持たないハミルトン系に対しても通常の数値解析法よりも良い結果を示す．しかし当然ハミルトニアンの存在しないような微分方程式系についてはシンプレクティック数値解析は適用できない．

4. シンプレクティック・レイトレーシング

4.1 処理手順

本節では，シンプレクティック数値解析に基づいて光線の軌道を求め，ブラックホールを可視化するシンプレクティック・レイトレーシングの手法を説明する．基本的な手順は通常のレイトレーシング法と同様であるが，直線の方程式を使用せずにハミルトンの正準方程式を用いる点が異なる．また，ハミルトンの正準方程式は微分方程式なので数値的に解かなければならず，数値解法としてはシンプレクティック数値解析を用いる．

まず，処理手順の概略について述べる．ブラックホールを可視化するには，まず対象とするブラックホールを決め，そのブラックホール周辺を運動する光線の軌道を計算するためのハミルトニアンを決定しなければならない．ハミルトニアンが決まればハミルトンの正準方程式が決まるので，観測者の視点と視線方向を微分方程式の初期値とし，数値的に解きながら光線の軌道を順次求める．光線がもし空間に配置した物体と交差したなら，交差点の物体の色を調べてスクリーンにプロットし，軌道計算を打ち切る．この光線の軌道計算をスクリーンの画素数だけ繰り返すことで，画像を生成する．

以下に，シンプレクティック・レイトレーシングの具体的なアルゴリズムを示す．

(1) 可視化対象にするブラックホールを決定し，そのために必要なハミルトニアンを選択する．たとえば，ブラックホールが複数個存在するなら，その場合のハミルトニアンを定義する．

(2) 視点の位置と観測方向を定め，ハミルトンの正準方程式の初期条件とする．

(3) 視点の位置からスクリーン上の点 (i, j) に向かうベクトルを計算し，視線ベクトルとする．

(4) 視点から視線ベクトルの方向に向けて，光線を発射する．

  (4.1) ハミルトンの正準方程式をシンプレクティック数値解析によって解き，現在の位相空間内の光線の位置 $\boldsymbol{z}_k$ から次の位置 $\boldsymbol{z}_{k+1}$ を求める．

  (4.2) ハミルトニアン H の変化率がしきい値

ΔH_{max} を超えたり，光線の運動時間がしきい値 λ_{max} を超えたりした場合，光線はブラックホールに吸い込まれたか，宇宙の無限遠方に飛んでしまったと判断し，スクリーン上の点 (i,j) に黒をプロットして (3) に戻る．

(4.3) $\boldsymbol{z}$ から一般化座標成分を取り出した線分 $\boldsymbol{q}_{k+1}\boldsymbol{q}_k$ と，オブジェクトの表面の交差判定を行う．交差していれば，交差点のオブジェクトの色を調べて，スクリーン上の点 (i,j) に色をプロットする．交差していなければ，$\boldsymbol{z}_k \leftarrow \boldsymbol{z}_{k+1}$ として，(4.1) に戻る．

以上の一連の手順のうち，ステップ (4) は発射される光線の数だけ実行される．光線どうしは互いに他の光線の運動に干渉しないと仮定すると，この部分は並列に処理することができる．

4.2　ハミルトンの正準方程式の数値解法

前節で示したアルゴリズムのステップ (4.1) におけるハミルトンの正準方程式に対するシンプレクティック数値解析は様々なものが提案されているが[11]，今回の実装では次のようなアルゴリズム[13]を採用する．

解くべき方程式は式 (1) である．この方程式は時間発展についての常微分方程式の一般形

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \tag{5}$$

の形をしていると見なすことができる．式 (5) の形の微分方程式を数値的に解くには連続的に変化する独立変数 t を離散化して $t_1, t_2, \cdots$ としなければならず，その際の間隔 $\tau = t_{k+1} - t_k$ を刻み幅と呼ぶ．また，数値解法によって計算された値が真の解を τ によってテイラー展開したときに τ の p 次の項まで一致することが保証されてる場合に，その数値解法を p 次の解法であるという．

ところで，式 (1) は $2n$ 個の方程式により構成されているので，定式化にあたって

$$\boldsymbol{z} = (p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = (&-\partial H/\partial q_1, \cdots, -\partial H/\partial q_n,\\ &\partial H/\partial p_1, \cdots, \partial H/\partial p_n)\end{aligned} \tag{7}$$

とベクトルで表現する．ここで，H は $\boldsymbol{z}$ の関数である．そして $2n$ 次元位相空間の点 $\boldsymbol{z}_k$ から，次の位置 $\boldsymbol{z}_{k+1}$ を算出するには，次の計算を行う．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_1 &= \boldsymbol{z}_k + \tau\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z}_1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z}_2)\right),\\ \boldsymbol{Z}_2 &= \boldsymbol{z}_k + \tau\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z}_1) + \frac{1}{4}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z}_2)\right),\\ \boldsymbol{z}_{k+1} &= \boldsymbol{z}_k + \frac{\tau}{2}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z}_1) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z}_2)).\end{aligned} \tag{8}$$

ここで，τ は先に述べた刻み幅を表す定数である．この公式は $\boldsymbol{Z}_1$，$\boldsymbol{Z}_2$ について陰的なので，$\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{z}_k$ を初期値とし，適当な回数だけ反復計算をする必要がある．収束判定は通常の ANSI/ISO 規定の C 言語における double 精度出力程度，すなわち小数点以下 6 桁程度が不変になった時点で反復を終了させている．我々の実験では，条件にもよるが 3 回程度の反復計算で収束することが多かった．ここに示した計算による $\boldsymbol{z}_k \to \boldsymbol{z}_{k+1}$ という写像はシンプレクティック性を保存することが，直接計算により容易に証明できる[11]．また，打ち切り誤差は 4 次のオーダーであり，しばしば使用される次の公式で表される通常の Runge-Kutta 公式と同じ次数である．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_1 &= \tau\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}_k),\\ \boldsymbol{Z}_2 &= \tau\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{z}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{Z}_1\right),\\ \boldsymbol{Z}_3 &= \tau\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{z}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{Z}_2\right),\\ \boldsymbol{Z}_4 &= \tau\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{Z}_3),\\ \boldsymbol{z}_{k+1} &= \boldsymbol{z}_k + \frac{1}{6}(\boldsymbol{Z}_1 + 2\boldsymbol{Z}_2 + 2\boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{Z}_4).\end{aligned}$$

上記の 2 つの数値解法は，同じ次数にもかかわらずブラックホールの可視化のための計算においては誤差の蓄積に差が出る．ハミルトニアンの存在するシンプレクティック系に対してはシンプレクティック数値解析の方が Runge-Kutta 法よりも性能が良い．また，一般にブラックホール時空での光線の運動を表すハミルトニアンは時間的に不変となるので，数値計算結果からハミルトニアンを計算し，初期値からどの程度ずれているか調べることによって数値計算の局所誤差が計測できる．これも Runge-Kutta 法にはないシンプレクティック数値解析の利点である．

5. 実験結果

図 1 のように配置されたブラックホールとオブジェクトを，観測者の視点から見た光景の可視化結果を紹介する．本章で結果を紹介するブラックホールは，球対称ブラックホール[4),14)~16)]，軸対称ブラックホール[4),17)]の 2 種類である．なお，背景画像には NASA の Hubble Space Telescope Public Pictures のうち，

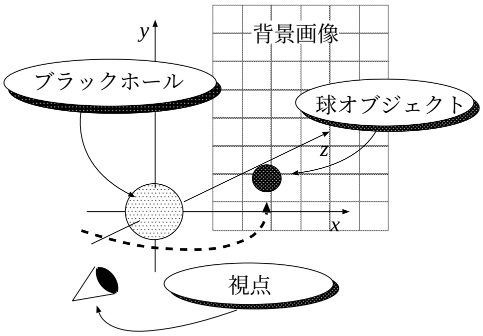

図 1 設定する世界モデル
Fig. 1 World model. A coordinate system is fixed and a blackhole is located at the origin.

Dust in Spiral Galaxies☆を用いた．ブラックホールの近傍に配置する球オブジェクトの表面には，地球の温度分布を表した画像データをマッピングする．以下，座標系は 4 次元極座標系 (t, r, θ, ϕ) を使用し，各座標成分に対応する運動量を $(p_t, p_r, p_\theta, p_\phi)$ と表す．単位は，相対論の研究で通常使用される光速 c と重力定数 G を 1 と置く幾何単位系[18]を用いた．アルゴリズムのステップ (4.2) におけるしきい値については，経験的に $\Delta H_{max} = 100$，$\lambda_{max} = 500$ とした．ΔH_{max} の値はかなり大きいが，これは主に光線がブラックホールに飛び込み，ハミルトニアンの値が莫大になる場合を検知するために用いたためである．

まず，比較のためにブラックホールが存在しない時空で光線追跡をした結果を**図 2** に示す．この場合，ハミルトニアンは

$$H = \frac{p_t^2}{2} - \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r^2}\frac{p_\theta^2}{2} - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{p_\phi^2}{2} \tag{9}$$

となる．一般にハミルトニアンは，ラグラジアン L という量より

$$H(p, q) = p\dot{q} - L \tag{10}$$

という計算で導くことが可能であり，本論文中ではすべて式 (10) の計算によりハミルトニアンを導いている．ラグラジアンとしては，佐藤[19]の定義と同じものを用いた．

次に球対称のブラックホールを配置した例が**図 3** である．この場合はハミルトニアンとして次式を使用した．

$$H = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\frac{{p_t}^2}{2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{{p_r}^2}{2} - \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{p_\phi^2}{2r^2\sin^2\theta}. \tag{11}$$

☆ http://www.astr.ua.edu/keel/research/dust.html

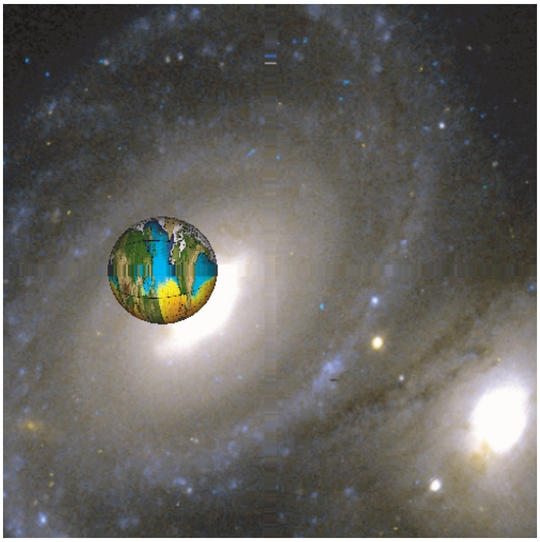

図 2 ブラックホールが存在しない平坦な時空
Fig. 2 Empty spacetime which contains no blackholes.

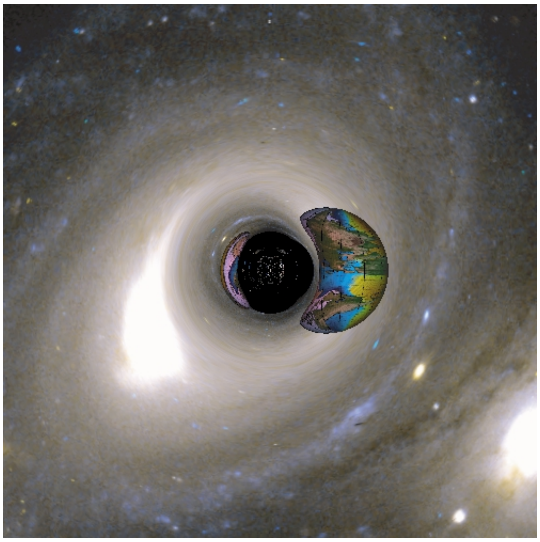

図 3 球対称ブラックホールを正面から観測した場合．中央部の黒い部分にブラックホールが存在する
Fig. 3 Spherically symmetric blackhole. Black part in the center means the blackhole.

ここで，r_g はブラックホールの質量を表すパラメータでブラックホール半径とも呼ばれ，図 3 の画像の生成の際には $r_g = 0.2$ と設定した．中央部の黒い部分がブラックホールである．ブラックホール周辺の画像は歪んでおり，重力レンズ効果が確認できる．

質量のほかに角運動量を持つ，軸対称のブラックホールを配置した例が**図 4** である．回転の軸は鉛直方向になっている．このようなブラックホールは次のようなハミルトニアンを用いて実現可能である．

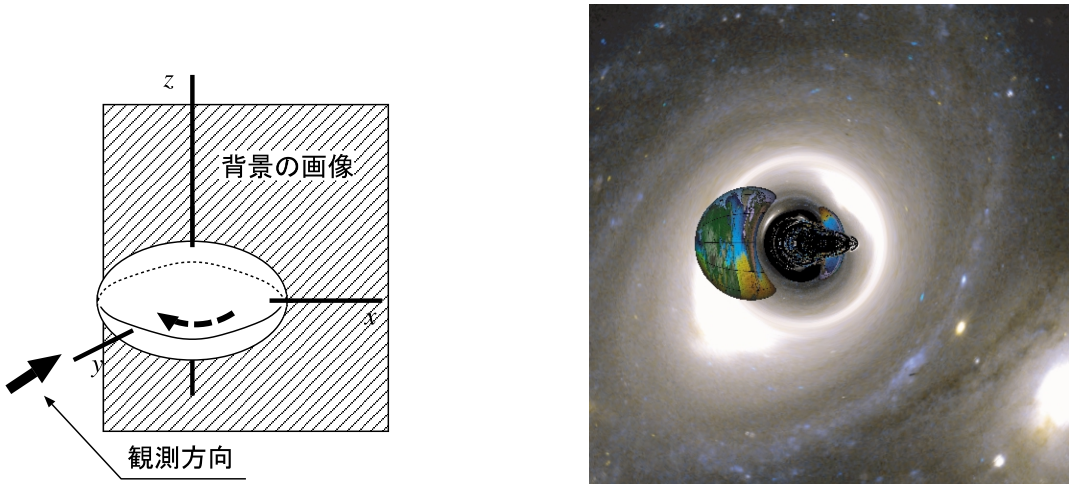

図 4 軸対称ブラックホールを正面から観測した場合．画像の鉛直方向にブラックホールの軸がある
Fig. 4 Axially symmetrical blackhole. The axis of symmetry is located vertically.

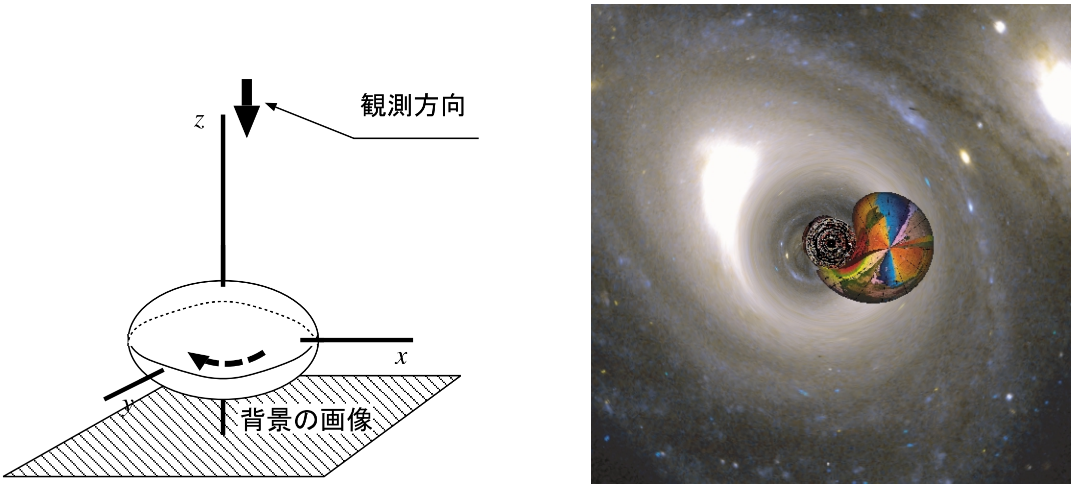

図 5 軸対称ブラックホールを上から観測した場合．観測者はブラックホールの軸上に存在する
Fig. 5 Axially symmetrical blackhole observed from the top. An observer is located on the axis of symmetry of the blackhole.

$$H=\left(1+\frac{r_g r(a^2+r^2)}{\rho^2\Delta}\right)\frac{{p_t}^2}{2}-\frac{\Delta}{\rho^2}\frac{{p_r}^2}{2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{{p_\theta}^2}{2}-\frac{\rho^2-r_g r}{\rho^2\Delta\sin^2\theta}\frac{{p_\phi}^2}{2}+\frac{a r_g r}{\rho^2\Delta}p_t p_\phi. \qquad (12)$$

ここで，$\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta$，$\Delta=r^2-r_g r+a^2$，$a$ はブラックホールの回転速度を表すパラメータである．図 4 においては $a=0.5$ と設定した．また，このハミルトニアンは，電荷を表すパラメータ e を用意して $\Delta=r^2-r_g r+a^2+e^2$ と定義し直すことにより，電荷を持つブラックホールにも拡張できる．星が崩壊してブラックホールになる場合，途中の過程は複雑であるが最終的には質量と角運動量と電荷だけをパラメータとして持つことが知られており[20]，このハミルトニアンで大抵のブラックホールを扱うことができる．

球対称ブラックホールの可視化例である図 3 と軸対称ブラックホールの可視化例である図 4 の違いを説明するために，ブラックホールが存在しない図 2 において存在する明るい 2 つの銀河のうち左側を A，右側を B とする．図 3 では，A はやや歪んだ形で，B は図 2 とほぼ同様の形で存在する．図 4 ではブラックホール周囲の光の輪には右上に塊があるが，これはブラックホールの重力レンズ効果により，ブラックホールの背後にある銀河 A からの光線が歪められた結果である．また非常に小さいがブラックホールの左上に小さな光の塊があり，これも銀河 B からの光線が歪められた結果である．軸対称ブラックホールの方がブラックホー

ルの効果が大きく現れていることが分かる．

図3の場合は球対称性からどの方向から観測しても同一の形状のブラックホールしか観測できないが，式(12)で表されるブラックホールは軸対称性を持つために観測する方向によって形が変わる．そこで図4とは異なる観測地点から観測したときの画像を**図5**に示す．ブラックホールの回転によって，球オブジェクトが時計回り方向に引きずられるように伸びているように観測される様子が示されている．

なお，本論文に示した生成画像はすべて 500×500 画素で，計算には sgi 社の Onyx2 や origin2000 などを用いた．

6. 考　　察

提案手法の有効性を調べるために，まったく同じ状況設定のもとで従来の測地線の方程式を使用する手法とハミルトンの正準方程式を使用する手法を，静的球対称のブラックホールを対象として比較する．

本研究の対象となるブラックホールは実際の観測映像が存在しないので，画像の正確さを実証的に検討することができない．そこで理論的に正確さを調べる方法として，山下[4)]の手法などでも採用されている「一般相対論において光はヌルベクトルとして扱われる」という事実を利用した方法を採用する．つまり，線素と呼ばれる次の量

$$\Delta s^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\Delta\tau^2 + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2 \qquad (13)$$

が，光線の軌道上では必ずゼロになる性質を利用する．光線の座標を数値的に算出して，その座標を式(13)に代入した結果がゼロからずれていると，ずれの分だけ不正確な計算結果であるといえる．そこで，式(13)の値を光線の軌道上で積算した値を誤差と定義し，提案手法（ハミルトンの正準方程式をシンプレクティック数値解析を用いて解く手法）と従来手法（測地線の微分方程式を古典的 Runge-Kutta 法で解く手法）での誤差を比較する．従来の測地線の微分方程式を解くことで光線の軌道を求める研究では，文献3)，4)では刻み幅変化型の2次の Runge-Kutta 法，文献5)では4次の Runge-Kutta-Fehlberg 法，文献16)では Euler 法，文献17)では3次の Leap frog 法など様々な数値解法が使用されている．そのためすべてと比較することは難しいために，ここでは非シンプレクティック数値解析の代表として，古典的な刻み幅固定の4次の Runge-Kutta 法を用いることにする．

比較結果を**図6**に示す．図6において，縦軸は誤差積算値，横軸は数値計算の刻み幅を表す．破線は測地線の方程式を4次の Runge-Kutta 法を用いて解いた場合，実線はハミルトンの正準方程式を式(8)を用いて解いた場合の刻み幅に対する誤差積算値を表す．ここで表されている誤差積算値は1万本の光線をブラックホール周辺に発射したときの式(13)の値の絶対値の合計である．計算はすべて ANSI/ISO 規定の C 言語における double 精度で行っている．図から，どちらの手法でも誤差は刻み幅に対して単調に増加するが，提案手法の方が誤差が小さいことが分かる．この結果から，用いた微分方程式の数値解法の次数が同じ4次であるにもかかわらず，シンプレクティック数値解法が誤差の点では有利であることが分かる．この違いは，しばしば行われるように「もし光速が非常に遅かったら」という仮定を置いて相対論的効果を大きく強調して提示する場合に大きく現れる．例として，刻み幅を 0.005 に設定してブラックホールを観測した場合に背景の銀河の歪み具合いがどのように変わってくるか，ブラックホールの近傍を拡大した画像で比較してみる．**図7**は光速が実際の約90%であった場合の計算結果である．左が測地線の方程式を Runge-Kutta 法で解く従来手法による結果，右がハミルトンの正準方程式をシンプレクティック数値解析により解く手法による結果である．この場合には，差異はまだ小さい．しかし，**図8**のように，光速が実際の約70%と仮定すると結果が大きく異なってくる．本論文では観測者は静止しており時空も静的であることを仮定しているが，光速に近いような速度で物体あるいは観測者が移動する場合に，光速が遅くなると仮定した場合と同様な可視化結果が得られると考えられる．どちらの場合も，

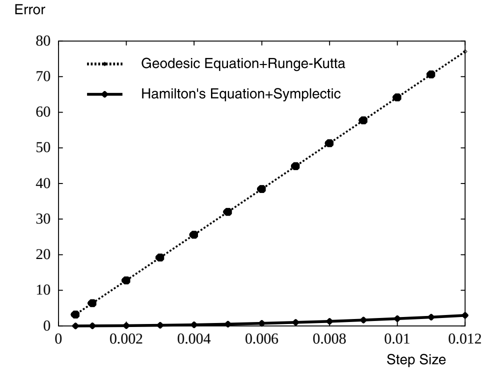

図6　誤差積算値の比較．縦軸，横軸ともブラックホール半径 r_g を 0.9 としたときの大きさを表す．単位は幾何単位系[18)]

Fig. 6　Total errors of the line elements with respect to step size. The vertical and horizontal axes express quantities in terms of blackhole radius $r_g = 0.9$. Geometrized units[18)] are employed.

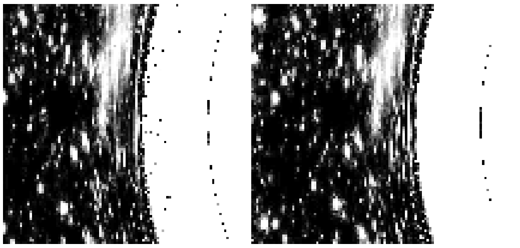

図 7 光速が通常の 90%の場合の可視化の比較（いずれも刻み幅は 0.005）．左が測地線の微分方程式と Runge-Kutta 法を用いた場合，右がハミルトンの正準方程式とシンプレクティック数値解析を用いた場合

Fig. 7 Comparison of generated images in the case that the speed of rays is slowed down to 90% of the normal speed (step size = 0.005). Left image is generated by solving geodesic equations using the Runge-Kutta method. Right image is generated by solving Hamilton's equations using the symplectic method.

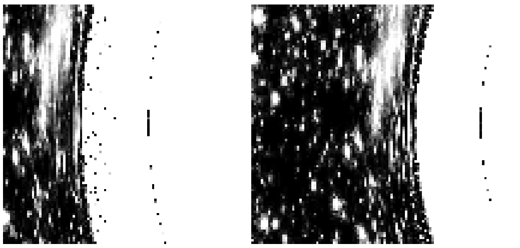

図 8 光速が通常の 70%の場合の可視化結果の比較（いずれも刻み幅は 0.005）．左が測地線の微分方程式と Runge-Kutta 法を用いた場合，右がハミルトンの正準方程式とシンプレクティック数値解析を用いた場合

Fig. 8 Comparison of generated images in the case that the speed of rays is slowed down to 70% of the normal speed (step size = 0.005). Left image is generated by solving geodesic equations using the Runge-Kutta method. Right image is generated by solving Hamilton's equations using the symplectic method.

光速と観測者あるいは移動物体との相対速度が縮まることを意味するからである．

7. おわりに

本論文では，(1) ブラックホール時空をハミルトン力学によりモデル化し，(2) シンプレクティック数値解析により光線の運動方程式を解き，(3) 光線追跡法により CG を作成するシンプレクティック・レイトレーシング法を提案した．提案手法の特徴はブラックホール周囲を運動する光線の軌道をハミルトン力学によって表現している点にあり，その結果誤差の蓄積が理論的に発生しないシンプレクティック数値解析が使用可能になり，従来の測地線の微分方程式を数値的に解く可視化手法よりも少ない誤差で光線の軌道を計算できる．ただし，本手法は，文献 4)，9) でふれられているような，光線がまったく架空の振舞いをする時空の可視化には適用できない．また，なんらかの理由によりハミルトニアンが適切に定義できないブラックホール時空に対しても適用不可能である．

以上，ブラックホール時空の可視化に対しては従来のように測地線の微分方程式を数値的に解く手法よりも優位性があることが分かったが，さらに本手法にはいくつかの改良すべき課題が残されている．本手法で採用したシンプレクティックな数値解法（式 (8)）はあらゆるハミルトン系に適用できる汎用的なものであるが，反復計算が必要であるなど計算コストが高い．ブラックホールのハミルトニアンの性質を検討し，専用の解法を開発することで，より効率的な計算ができる可能性がある．また，本論文では写実的な CG を目指した手法を提案したが，ボリュームレンダリングなどを用いて時空の曲率や重力の強さを表現するなど，可視化手法の発展も考えたい．

参考文献

1) Misner, C., Thorne, K. and Wheeler, J.: *Gravitation*, W.H. Freeman and Co. (1973).

2) Hehl, F., Puntigam, R. and Ruder, H.: *Relativity and Scientific Computing*, Springer-Verlag (1996).

3) 山下義行：ブラック・ホールのコンピュータグラフィックス：光線追跡法の曲がった 4 次元時空への拡張，情報処理学会論文誌，Vol.30, No.5, pp.642–651 (1989).

4) 山下義行：相対性理論のコンピュータグラフィックス，日本物理学会誌，Vol.53, No.11, pp.819–825 (1998).

5) 佐藤 哲，岩佐英彦，竹村治雄，横矢直和：物体の相対論的運動の重力場光線追跡法による可視化，信学技報，IE95-126 (1996).

6) Whitted, T.: An Improved Illumination Model for Shaded Display, *Comm. ACM*, Vol.23, No.6, pp.343–349 (1980).

7) Enright, W.H., Higham, D.J., Oweren, B. and Sharp, P.W.: A Survey of the Explicit Runge-Kutta Method, Technical Report 291/94, Dept. Computer Science, Univ. of Toronto (1995).

8) Yoshida, H.: Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol.56, pp.27–43 (1993).

9) Gröller, E.: Nonlinear Ray Tracing: Visualizing Strange Worlds, *The Visual Computer*, Vol.11, pp.263–274 (1995).

10) Kinoshita, H., Yoshida, H. and Nakai, H.:

Symplectic Integrators and Their Application to Dynamical Astronomy, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol.50, pp.59–71 (1991).

11) Sanz-Serna, J.: Symplectic Intergrators for Hamiltonian Problems: An Overview, *Acta Numerica*, pp.243–286 (1991).
12) 山本義隆，中村孔一：解析力学 I，pp.303–305, 朝倉書店 (1998).
13) Pullin, D.I. and Saffman, P.G.: Long-time Symplectic Integration: The Example of Four-Vortex Motion, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol.432, pp.481–494 (1991).
14) 佐藤　哲：Regge Calculus による重力場方程式の数値計算と重力場光線追跡法，修士論文，NAIST-IS-MT9451049, 奈良先端大 (1996).
15) Nollert, H., Kraus, U. and Ruder, H.: Visualization in Curved Spacetimes. I. Visualization of Objects via Four-Dimensional Ray-Tracing, *Relativity and Scientific Computing*, chapter 16, Springer-Verlag, Berlin (1996).
16) Bryson, S.: Virtual Spacetime: An Environment for the Visualization of Curved Spacetimes via Geodesic Flows, *Proc. Visualization'92*, pp.291–298 (1992).
17) Jensen, B.: Null Geodesics Around a Kerr Black Hole (1996). http://www.astro.ku.dk/~milvang/RelViz/
18) Wald, R.M.: *General Relativity*, pp.470–471, The University of Chicago Press (1984).
19) 佐藤文隆：相対論と宇宙論，pp.119–128, サイエンス社 (1981).
20) Hawking, S. and Ellis, G.: *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press (1973).

(平成 12 年 1 月 5 日受付)
(平成 12 年 12 月 1 日採録)

佐藤　哲（学生会員）

1992 年釧路工業高等専門学校情報工学科卒業．1994 年千葉大学工学部情報工学科卒業．1996 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程修了．同年同大学情報科学研究科博士後期課程入学，現在に至る．科学的可視化，CG，数値解析等の研究に従事．2000 年情報処理学会大会奨励賞受賞．日本応用数理学会会員．

岩佐　英彦（正会員）

1990 年大阪大学工学部通信工学科卒業．1994 年同大院博士後期課程中途退学．同年奈良先端科学技術大学院大学情報科学センター助手．1995 年情報科学研究科助手．2000 年（株）ネットシステムズ入社，現在に至る．人工知能，画像検索，情報可視化の研究に従事．ACM 会員．

竹村　治雄（正会員）

1987 年大阪大学大学院基礎工学研究科博士後期課程単位取得退学．同年（株）ATR 入社．ATR 通信システム研究所勤務．1994 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授．現在に至る．3 次元ユーザインタフェース，CSCW，仮想現実等の研究に従事．IEEE，ACM，映像情報メディア学会，日本バーチャルリアリティ学会等会員．工学博士．

横矢　直和（正会員）

1974 年大阪大学基礎工学部情報工学科卒業．1979 年同大学大学院基礎工学研究科博士後期課程修了．同年電子技術総合研究所入所．1986 年カナダマッギル大学客員教授（1 年間）．1992 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学センター教授．1994 年情報科学研究科教授．現在に至る．画像処理，コンピュータビジョン，CG の研究に従事．IEEE，人工知能学会，映像情報メディア学会，画像電子学会等会員．工学博士．