6F－6

# 制約充足問題における制約緩和法を用いた最適化

原　裕貴、湯上　伸弘、吉田　裕之
(hara@flab.fujitsu.co.jp)
（株）富士通研究所

## 1. はじめに

近年、制約充足問題(Constraint Satisfaction Problem, 以下 CSP) が、AIにおける重要な問題として論じられている。CSPは、制約を満たすように、与えられた変数に対する値の割り当てを見つける問題である。CSPの目的は、制約を満たす解を１つ見つけることであるが、我々は、制約を満たす割り当ての中で、与えられた目的関数を最適化する解を求める問題を扱う。我々は、このような問題を制約充足最適化問題(Constraint Satisfying Optimization Problem, 以下 CSOP ) と呼ぶ。

一般に、CSP は NP-complete であることが知られているので、ヒューリスティクが利用される。近年、最小制約違反ヒューリスティク(Min-conflict heuristic )とよばれる効率のよいヒューリスティクが提案されている [1]。これは初期割り当てから開始して、制約違反している変数を選んで、最も制約違反を減らすように値の再割当を行ない、これを制約が完全に充足されるまで繰り返す。

本論文では、我々は、最小制約違反ヒューリスティクの利点を生かした、CSOP に対するヒューリスティクな手法を提案する。また、典型的な CSP である N-queen 問題を拡張した CSOP を取り上げ、我々の手法が、特に制約が強い問題に対して有効であることを実証する。

## 2. 制約充足最適化問題

CSP は次のように定義されている[2]。CSP は、変数の集合 $\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ と変数間の制約の集合から構成される。変数 $X_i$ の領域 $D_i$ は、変数が取りえる値の集合を表す。個々の制約 $C_{i1,i2,\ldots,im}(X_{i1},X_{i2},\ldots,X_{im})$は、$D_{i1}\times D_{i2}\times\ldots\times D_{im}$の部分集合であって、許される値の組み合わせを表す。

CSOP は、このようなCSPの解の中で、目的関数 $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$を最適化（最小化でも最大化でも可）するものを求める問題と定義する。

## 3. 制約緩和法

我々が本稿で議論するのは、初期割り当てを行なった後、変数を一つ選んで値を再割り当てすることを繰り返す、局所探索法である。

CSOPを局所探索法で解く場合、簡単な方法は、まず制約充足解を一つ求め（たとえば前述の最小制約違反ヒューリスティクを使うことができる）、制約を満たしつつ、目的関数が改善される方向に、変数の値の再割当を繰り返せばよい。以下では、この方法を制約充足山登り法と呼ぶ。

この手法は、制約条件が弱くて、解空間中に制約充足解がある程度存在する場合はうまく行く（このような問題を弱制約問題と呼ぶ）。しかし、制約条件が強くて、制約充足解が少なくなると、うまく行かなくなる。なぜならば、ある制約充足解の回りに存在する制約充足解が減り、局所最適解が多数発生するからである（このような問題を強制約問題と呼ぶ）。

我々は、このような問題点を解決するために、制約充足山登り法とは異なる手法を開発した。我々の手法は次のとおりである。まず、制約条件を緩和して最適解を求める。それから、目的関数をなるべく悪くしないようにしながら、徐々に制約違反の数を減らしていく。我々は、この手法を制約緩和法と呼ぶ。

アルゴリズム

1. 制約を緩和した最適解を求め、初期解とする。
2. 制約違反している変数がなくなったら、終了。
3. 制約違反している変数を任意に一つ選ぶ。
4. その変数に対して、次の条件(a) か (b) を満たすものの中で、最も目的関数の値が良い値を割り当てる。
   (a) その割当は、制約違反の数を減らす。
   (b) その割当は、制約違反の数を変化させ

Constraint Relaxation Method for Constraint Satisfying Optimization Problems.
H. HARA, N.Yugami, H.Yoshida
FUJITSU LABORATORIES LTD.

ず、目的関数の値を改善する。
5．2に戻る。

このアルゴリズムは最小制約違反ヒューリスティクの長所を利用している。両者が似ている点は、値を変更する変数を、制約違反している変数の中から選ぶ点、制約違反の数が増加することが決してない点、バックトラックが決して起きない点である。

それに対して、異なっている点は、制約を緩和した最適解を初期割り当てとする点と、変数の値を再割り当てする際に、最も制約違反を減らす値ではなくて、目的関数の値を最も良くする値を選ぶ点である。

## 4. CSOP の例（N-queen 問題）

N-queen 問題は典型的な CSP である。この章では、このN-queen 問題に目的関数を追加して、CSOP を定義する。

N-queen 問題は次のように定義することができる。

*Variable* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

*Domain* $D_i = \{1,2,\ldots,N\}$ $(i = 1,2,\ldots,N)$

*Constraint* $R_{ij} = \{(v_i, v_j) \mid v_i \neq v_j,\ |i - j| \neq |v_i - v_j|\}$

さらに目的関数が必要である。本稿では、各クイーンと対角線との距離の和を目的関数とし、この関数の値を最小にするものを最適解とする。

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = \Sigma_{k=1}^{n} |X_k - k|$$

## 5. 実験結果

この章では、N=50 における N-queen の最適化を前述の2つの手法で行なった結果を比較する。

ここでは2つの問題を用意した。一つは強制約問題で、全ての制約を満足する必要がある。もう一つは弱制約問題で、制約違反の数を3つ以下にすることを条件とする。この場合、制約充足山登り法は、まず最小制約違反ヒューリスティクを用いて、制約違反の数3つ以下の割当を求め、制約違反の数をこの範囲に押さえながら、目的関数の改善を行なう。

我々の制約緩和法は、制約充足山登り法より時間がかかる。そこで、制約充足山登り法については、10回試行を行ない、そのベスト、ワースト、アベレージを測定した。その結果、トータルの試行時間は、我々の緩和法の方が少なくなった。

測定はSun-4上のQuintus-prologを使って行なった。測定結果を表1、2に示す（Total time の単位は Sec.）。

| Method | Best | Ave. | Worst | Total time | Trial |
|---|---|---|---|---|---|
| Relaxation | 645 | - | - | 481 | 1 |
| Hill-climb | 647 | 690 | 750 | 557 | 10 |

表1．弱制約問題に対する結果

| Method | Best | Ave. | Worst | Total time | Trial |
|---|---|---|---|---|---|
| Relaxation | 742 | - | - | 403 | 1 |
| Hill-climb | 802 | 845 | 884 | 516 | 10 |

表2．強制約問題に対する結果

弱制約問題に対しては、結果はほとんど変わらなかった。これは、制約が弱いときは、制約充足山登り法がうまくいくことを示している。

それに対して、強制約問題に対しては、制約充足山登り法において、解の改善は全く起こらなかった。これは、個々の制約充足解の回りに別の制約充足解が存在しないことを示している。初期解生成に用いている最小制約違反ヒューリスティクは、同じ数の制約違反を起こす値の割り当ての中から任意に選択を行なうので、この場合制約充足山登り法は、制約充足解をランダムに生成しているのと変わりがない。強制約問題に対しては、我々の手法が、かなり良い解を生成していることがわかる。

## 6. おわりに

CSOP は、重要で有用な問題であるが、また難しい問題である。我々の制約緩和法は、広い範囲の CSOPに対して適用でき、とくに制約が強い難しい問題に対して有効である。我々の手法は大域的な最適性を保証するわけではないが、このような問題の最適解を見つけることは非常に困難なので、十分に実用的であると考える。我々は現在、この手法をスケジューリング問題に対して適用する研究を行なっている。

## 参考文献

[1]S.Minton,et al. Solving Large-Scale Constraint Satisfaction and Scheduling Problems Using a Heuristic Repair Method. AAAI-90, 1990.
[2]A.K.Mackworth,E.C.Frender. The complexity of some polynomial network consistency algorithms for constraint satisfaction problems. Artificial Intelligence, Vol.25, 1985