6B−8

離散値形ファジィ集合の従属座標系への表現とコスモスダイアグラム

矢鳴 虎夫　廣田 豊彦
（九州工業大学）

まえがき： ファジィ集合およびファジィ集合群の新しい表現法を提案する。従来、関数解析などの数学理論は独立座標系の上で議論されて来た。実際ファジィ理論の世界でも B.KOSKO が n 次元超立方体 $[0,1]^n$ 上で展開した新しい理論を提案しているが [1]、これとて3次元以上になると平面上にそのイメージを表現することは原理的に不可能である。

一方、現実世界での色々な対象物を見てみると、必ずしも独立座標系上だけで表現されているとは限らない。むしろ従属物の上で定義されたり表現されたりする場合が多い。そこで筆者等はまず従属座標系の定義をベクトルを用いて行ない、これをベースにした空間上で定義される離散値形ファジィ集合およびファジィ集合群の表現論を展開する。更にこの方法で表現される図が星座系を象徴するものであることからこれをコスモスダイアグラムと名付けることにする。

1　従属座標系の定義

まず2つのベクトル $\vec{x}_1$ 、$\vec{x}_2$ を取り出しこれを関係づける関数 $R(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ として、

$$R(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = |\vec{x}_1 + \vec{x}_2| - \frac{1}{2}(|\vec{x}_1| + |\vec{x}_2|) \quad (1)$$

を考える。この関係は $\vec{x}_1$ と $\vec{x}_2$ が重なると1、±120°開くと0、±180°開くと−1になるような関数である。この関数で2つのベクトル間が関係づけられる。長さ1の n 個のベクトル集合 $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ を台集合とする従属座標系が定義できる。図1は $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\}$ で構成される従属座標系の一例であり、これは表1の関係マトリックスと対応する。

表1.
図1と(1)式から計算される関係マトリクス

	$\vec{x}_1$	$\vec{x}_2$	$\vec{x}_3$	$\vec{x}_4$
$\vec{x}_1$	1	0.87	0.57	−0.45
$\vec{x}_2$	0.87	1	0.93	−0.97
$\vec{x}_3$	0.57	0.93	1	−0.25
$\vec{x}_4$	−0.45	−0.97	−0.25	1

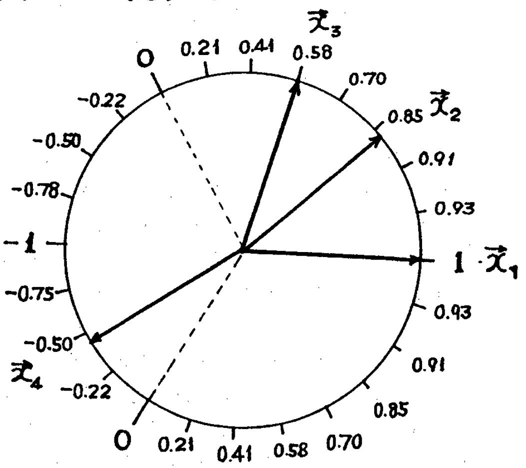

図1.　$R(x_i, x_j)$でつくられる従属座標系

2　従属座標系上のファジィ集合の表現と縮小ベクトル空間への写像

一般に命題集合のような離散値形台集合 $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ の上に定義されるファジィ集合 $\vec{A}$ は、

$$\vec{A} = \{\vec{a}_1/\vec{x}_1, \vec{a}_2/\vec{x}_2, \ldots, \vec{a}_n/\vec{x}_n\} \quad (2)$$

と表記される。これは $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ が一意的に従属関数を保持する場合は（1）の関係式を用いて $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ で構成されるベクトル空間 X をつくることができる。図2の左図は $n=4$ の台集合の1例である。

我々は、この $\{\vec{a}_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ に系列から、一般にベクトルファジィ濃度 $\vec{M}(\vec{A})$ と重心ベクトル $\vec{G}_{\vec{A}}$ が定義できる。つまり

$$\vec{M}(\vec{A}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \quad (3)$$

$$\vec{G}_{\vec{A}} = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \frac{1}{n}\vec{M}(\vec{A}) \quad (4)$$

一方、この重心はファジィ集合 $\vec{A}$ の1つの抽象表現と考えられるので、ファジィ集合 $\vec{A}$ をこの重心 $\vec{G}_{\vec{A}}$ 回りに縮小図形として表現できる。

図形上のまぎらわしさをのぞくために同じような関係で定義されたベクトル空間 X' を想定すれば、その上への写像として考えることができる。図2はこの写像を表している。またこれは数学的に次のように表記することができる。

Expression of Discrete Type Fuzzy Sets
on Dependent Coordinates System & COSMOSDIAGRAM
Torao Yanaru and Toyohiko Hirota
Kyushu Institute of Technology

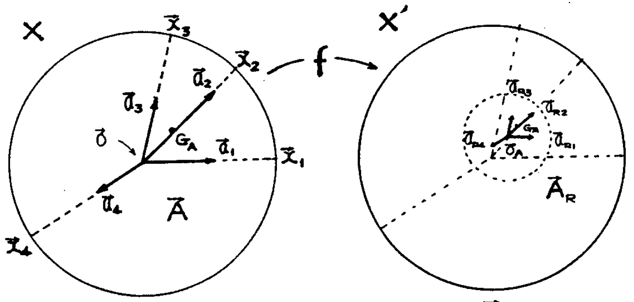

図２．集合$\vec{A}$とその縮小変換写像$\vec{A}_R$

$$f : \vec{a}_i(\vec{O}) \text{ in space } X \rightarrow \vec{a}_{R_i}(\vec{O}_{\vec{A}}) \text{ in space } X' \quad (5)$$

$$\vec{a}_{R_i} = k\vec{a}_i \ , \quad \vec{O}_{\vec{A}} = (1-k)\vec{G}_A$$

ここに、k は縮小率であり、$\vec{a}_i(\vec{O})$ および $\vec{a}_{R_i}(\vec{O}_{\vec{A}})$ は原点 $\vec{O}$ および 原点 $\vec{O}_{\vec{A}}$ を起点にして描かれるベクトル $\vec{a}_i$ およびその縮小ベクトル $\vec{a}_{R_i}$ を意味する。

このような方法で我々は台集合 X 上で定義されるファジィ集合群を X' 上に表現することができる。かくして集合群としての全体像を、新たに重心ベクトルによるファジィ集合をその中心に作ることができる。図３はその１例である。さらに $\vec{a}_i$ そのものが別の台集合 Y で表される場合にはさらに詳しい表現ができる。図４はこのことを表している。このようにして我々は多重世界に関する表現も可能になる。またこの図は一種の星座系を象徴しているのでこの縮小図形をコスモスダイアグラムと呼ぶことにする。

一方この写像 f の 性質は次のように数学的記法でもって表現できる。

$$f(\vec{a}_i(\vec{O}) \mid \vec{a}_i \in \vec{A}) = \vec{a}_{R_i}(\vec{O}_{\vec{A}}) \quad (6)$$

$$f(\vec{a}_i(\vec{O}) + \vec{a}_j(\vec{O})) = \vec{a}_{R_i}(\vec{O}_{\vec{A}}) + \vec{a}_{R_j}(\vec{O}_{\vec{A}}) \quad (7)$$

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i(\vec{O})\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_{R_i}(\vec{O}_{\vec{A}}) \quad (8)$$

したがって

$$f(\vec{G}_{\vec{A}}(\vec{O})) = \vec{G}_{R_i}(\vec{O}_{\vec{A}}) \quad (9)$$

$$f((\vec{G}_{\vec{A}}(\vec{O}) + \vec{G}_{\vec{B}}(\vec{O}))/2) = \frac{1}{2}(\vec{G}_{R_{\vec{A}}}(\vec{O}_{\vec{A}}) + \vec{O}_{R_{\vec{B}}}(\vec{O}_{\vec{B}})) \quad (10)$$

$$f(\vec{A}(\vec{O}) \wedge \vec{B}(\vec{O})) = \vec{A}_R \wedge \vec{B}_R(\vec{O}_{\vec{A}\wedge\vec{B}}) \quad (11)$$

$$f(\vec{A}(\vec{O}) \vee \vec{B}(\vec{O})) = \vec{A}_R \vee \vec{B}_R(\vec{O}_{\vec{A}\vee\vec{B}}) \quad (12)$$

その他、ファジィ集合 $\vec{A}$ と $\vec{B}$ との距離 :

$$\delta(\vec{A},\vec{B}) = (\vec{G}_{\vec{A}} - \vec{G}_{\vec{B}})R(\vec{G}_{\vec{A}},\vec{G}_{\vec{B}}) \quad (13)$$

$$= (\vec{G}_{\vec{A}} - \vec{G}_{\vec{B}})R(\vec{A}_R,\vec{B}_R)$$

このようにして我々は新たな数学理論をつくることができる。

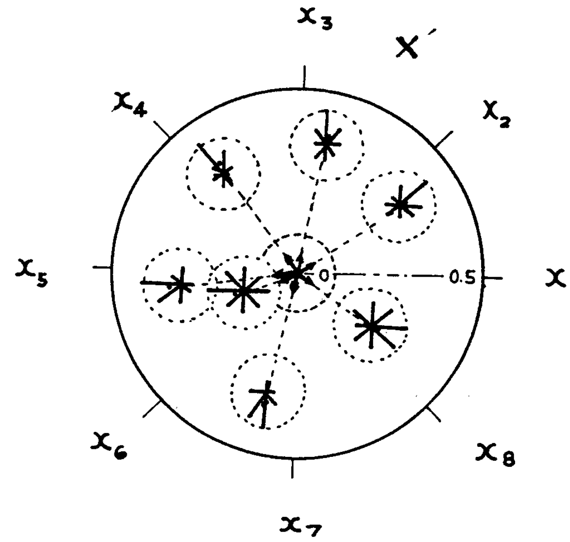

図３．変換されたファジィ集合群の例

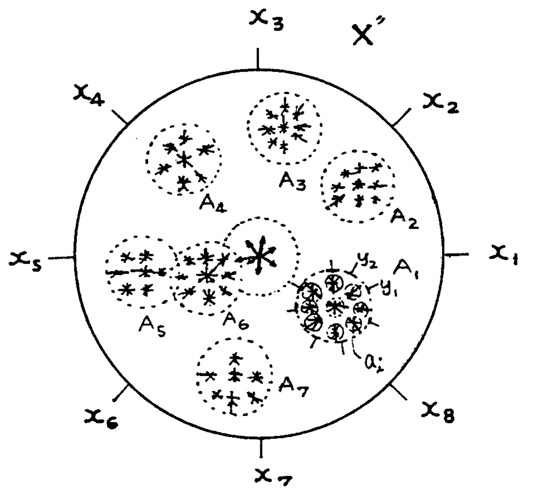

図４．多重世界を思わせるコスモスダイアグラム
（２回の縮小変換による）

まとめ 紙面のの都合で掲載できないがこの理論と表現は色々のものに対して有効である。とりわけ、ニューロン回路網の表現は極めて有効である。紙面の都合で本論には掲載できなかった。その他理論をさらに充実する意味では、一般によく知られているファジィ関係マトリクスと従属座標系との関係を研究しなければならない。

謝辞 本研究にあたり本学 山川 烈 教授、内野 助教授その他卒業研究生の中村 友一 君に貴重なな討論をして頂いた。ここに深く感謝の意を表する。

参考文献

[1] Bart KOSKO. *Newral Networks and Fuzzy sets*, pren- chap.16,, prentice hall, 1990

[2] 矢鳴 他“メンバーシップ関数に基づく学習感覚の表現”電気関係学会九州支部連合大会 、’90.10.