単体法の並列処理に関する基礎的検討

6B−4

大柳 俊夫　　大内 東
(北海道大学)

1．はじめに

近年のコンピュータ技術の発展は著しく，最近では，従来の逐次処理の速度の限界を克服するための並列処理コンピュータの開発が急速に進み，商品化されてきている[1]．このため並列処理コンピュータは，一部の研究機関に限られたものというイメージから，広く一般にも利用可能なものへと移り変りつつある．

このような並列計算機の出現に伴い，対象とする問題に対して，その性能を十分引き出すための並列アルゴリズムやそのインプリメント手法の開発が強く要求され，数値計算の分野などでさまざまな研究が行われてきている[2]-[5]．

本稿では，幅広い応用分野で利用されている単体法の並列化ならびに並列化に伴う従来のアルゴリズムの再検討について述べる．これは，並列計算の第一目的である計算速度の向上を目指すものである．また，並列計算を行うことにより，単体法を基礎とする最適解（もしくは準最適解）探索の新たなアプローチについて考える．なお本稿では，特に断らない限り，改訂単体法や基底の三角分解を行う単体法も総称して単体法と呼ぶことにする．また，一般に並列アルゴリズムを検討する場合は，並列計算機のアーキテクチャーを十分に考慮しなければならないが，ここではアーキテクチャーに依存しない立場での考察を行う．

2．単体法の並列化

単体法は，線形計画問題

$$\begin{aligned} &\max && z = cx \\ &\text{sub. to} && Ax = b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

を解く方法としてG.B.Danzigにより開発されたものである[6]．この方法の理論的な計算複雑度は，最悪の場合指数オーダーであるが，現在までの膨大な数値実験の結果ならびに平均的な振舞いに関する理論的検討から，実用上は多項式オーダーとみなすことができることが知られている．そのため，最近の線形計画問題に対する多項式オーダーの解法の発展にもかかわらず，現在でも多くの場面で利用されている解法である．

この単体法の並列計算に関する現在までの研究は，いままでの逐次処理の単体法のアルゴリズムを並列化することが中心である．また，対象とするＬＰ問題は，係数行列Ａが特殊構造をしていて分解原理を適用できる場合に限られている[7]

単体法における中心的な計算は，基底の更新，つまり

(1) ピボット要素の探索，
(2) ピボット操作

であり，これは行列演算であるからその並列化は自然な形で実現可能と考えられる．その際には，すでに多くの研究がなされている連立一次方程式の解法に関する並列化の成果が利用可能となる[8]-[10]．しかしより計算を高速化するためは，単体法のアルゴリズムの中で以下の点を再検討する必要がある．

(3) 再分解の周期（反復回数もしくは一反復に要する時間など）．
(4) ピボット選択の規則（最大係数則，最小添字則もしくは局所的な目的関数最大化など）．

(3)と(4)の再検討の必要性は，(3) に関し

Basic Considerations of Parallel Computation for Simplex Algorithm.
Toshio OHYANAGI and Azuma OHUCHI
Hokkaido University

ては，最分解や一回のピボット操作（一反復）に要する時間が並列処理によりかなり短縮されるため，これらの計算時間が全体の計算時間に占める割合が変化することが予想されるためである．また(4) に関しては，新しく基底に入れる変数と基底から追い出す変数の組を複数並列に考慮できるためである．

3．並列処理による新たな解探索アプローチ

解の探索を並列に行えることを考慮すると，単体法を基礎とするＬＰ問題の最適解（もしくは準最適解）の探索として以下の４つのアプローチを考える．

(a) 同一の問題を並列にいくつかのピボット選択規則で解き，最適解探索の進行を互いに監視し，探索経路に変化を持たせる．

(b) 同一の問題を並列にいくつかのゼロ・トレランスを用いて解き，精度の悪化の監視を行う．

(c) 主問題と双対問題を並列に解き，目的関数値の差を監視し，最適解探索の打切り等を行う．

(d) 探索可能なすべての方向に並列に進み，各端点に対応する基底解を計算し，最適解を求める．

(a) は，探索を広げることにより，より少ない反復回数で最適解を得ることを目指すものである．これにより，探索経路は従来とは違い不連続なものとなる可能性がある．また，サイクリングからの脱出も行うことができる．(b) は，ゼロ・トレランスが非常に微妙な問題で，この値により得られる解が大きく影響される事実を考慮して[6]，最適解探索をできる限り正確に行うことを目指すものである．そして(c) は，最適解ではないが，実際の問題に対して十分満足のいく解（準最適解）をできる限り早く得ることを目指すものである．最後に(d) は，(a) の特殊な場合であり，より少ない反復回数で最適解を得ることを目指すものであるが，現状の計算機の性能では実用には耐えられないと思われる．

4．おわりに

本稿では，単体法を並列化し計算をより高速化する場合に行わなければならない検討事項を明らかにした．また，並列計算を行うことにより，単体法を基礎とするＬＰ問題の解探索の新たなアプローチの可能性をを考えた．

今後は，今回の検討事項を並列計算機のアーキテクチャを考慮してより具体化する．そして，UNIXワークステーション上で並列処理をシミュレートする環境を構築し，シミュレーション実験を行い，アルゴリズム等の再検討を行う．最終的には，実際に並列計算機上での実験・検討を行う予定である．

参考文献

(1)高橋：並列処理機構，丸善(1989)

(2)関口，小柳:科学技術計算における並列化技術，情報処理，Vol.27，No.9，p985-994 (1986)

(3)小柳:数値計算の並列ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ，並列ｺﾝﾋﾟｭｰﾀ･ｱｰｷﾃｸﾁｬ，bit臨時増刊，Vol.21，No.4 (1989)

(4)宮野:並列ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ，数理科学，No.328，P56-61(1990)

(5)大森訳:並列ﾌﾟﾛｸﾞﾗﾐﾝｸﾞの基礎，丸善(1990)

(6)V.Chvatal:Linear Programming(1983)

(7)J.B.Rosen and R.S.Maier:Parallel Solution of Large-scale,Block-angular Linear Programs,Annals of Oper. Res., Vol.22,pp23-41(1990)

(8)A.George and E.Ng:Some Shared Memory is Desirable in Parallel Sparse Matrix Computation,SIGNUM Newsletter, Vol.23,No.2,pp.9-13(1988)

(9)T.A.Davis and P.Yew:A Nondeterministic Parallel Algorithm for General Unsymmetric Sparse LU Factorization, SIAM J.Matrix Anal.Appl.,Vol.11,No.3, pp.383-402(1990)

(10)C.Ho and R.C.T.Lee:A Parallel Algorithm for Solving Sparse Triangular Systems,IEEE Trans.on Computers, Vol.39,No.6,pp.848-852(1990)