5B−10

RS型ベクトル機械上での幾つかの具体的問題に対するアルゴリズム

岩本宙造　岩間一雄
(九州大学工学部)

1. まえがき

ベクトル機械は、種々のベクトル命令セットがどのような能力を持つかという観点から、幾つかの論文で論じられてきた([1][2][4]等)。文献[2]は、並列モデルの局所計算と通信をより明確に分離するため、ベクトル機械の命令セットとして、要素ごとの加減演算(局所計算に対応)や、ベクトルを拡大する2種類の *repeat,stretch* 演算ならびにそれらの逆演算(通信に対応)を導入した。*repeat* は、例えばベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ を $(a_1, a_2, \cdots, a_m, a_1, a_2, \cdots, a_m)$ に、*stretch* は $(a_1, a_1, a_2, a_2, \cdots, a_m, a_m)$ にする演算である。このベクトル機械(RS型ベクトル機械)は、上記演算の拡大縮小の度合(拡大率)を変化することにより、異なった能力のベクトル機械を作れることが知られている。より詳しくは、拡大率2のとき、TMの多項式領域を多項式時間量に、拡大率 m のとき、ATMの指数時間多項式交代数を多項式時間量に加速する能力がある。さらに、文献[3]は、拡大率2は k に、m は cm^k に置き換わることを示し、拡大率が指数的に大きくなったときの能力についても考察している。このようにRS型ベクトル機械の能力については、多項式時間という大雑把な範囲内での一般的シミュレーションに限定すればかなり明らかになったといえる。

本稿では拡大率が2のRS型ベクトル機械を用いて具体的なNP完全問題を高速に解くアルゴリズムを紹介する。2.でRS型ベクトル機械の説明を行ない、3.で充足可能性問題を $O(n)$ 時間で、4.でハミルトン閉路問題を $O(n\log^2 n)$ 時間で解くアルゴリズムを紹介する。

2. RS型ベクトル機械

長さ m のベクトルは $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ で表される。ここで各 a_i ($A[i]$ でも表される)は、非負の整数(スカラー)である。$A = (a_1, a_2, \cdots, a_i)$, $B = (b_1, b_2, \cdots, b_j)$、さらに $\circ$ をスカラーに対する2項演算とする。このとき、$A \circ B = (a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2, \cdots, a_k \circ b_k)$ (ただし、$k = \min(i, j)$) である(要素ごとの演算)。A と B の連接を $AB = (a_1, a_2, \cdots, a_i, b_1, b_2, \cdots, b_j)$ と記す。$A^p = A^{p-1}A, A^1 = A$ である。本稿では、ベクトル演算として *repeat, stretch* の2種類とそれぞれの逆演算 *fold, contract* を導入し、それぞれ $\downarrow, \rightarrow, \uparrow, \leftarrow$ で表す。m をベクトルの長さとすると、これらの演算は拡大率を表す関数 $d(m)$ を与えることによって意味を持ち、次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
\downarrow A &= A^{d(m)} \\
\rightarrow A &= (a_1^{d(m)}, a_2^{d(m)}, \cdots, a_m^{d(m)}) \\
\uparrow B &= (f(a_1, a_{m+1}, a_{2m+1}, \cdots, a_{(d(m)-1)m+1}), \\
&\quad\ f(a_2, a_{m+2}, a_{2m+2}, \cdots, a_{(d(m)-1)m+2}), \\
&\quad\ \cdots\cdots \\
&\quad\ f(a_m, a_{2m}, a_{3m}, \cdots, a_{d(m)m})) \\
\leftarrow B &= (f(a_1, a_2, \cdots, a_{d(m)}), \\
&\quad\ f(a_{d(m)+1}, a_{d(m)+2}, \cdots, a_{2d(m)}), \\
&\quad\ \cdots\cdots \\
&\quad\ f(a_{(m-1)d(m)+1}, \cdots, a_{md(m)}))
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
f(a_1, a_2, \cdots, a_m) = \begin{cases} 0 & \text{if } a_1 = \cdots = a_m = 0 \\ a & \text{if 少なくとも1つの要素が } a \text{ で残りは0} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}
$$

拡大率 $d(m)$ のRS型ベクトル機械(以下RS-VM)をRS-VM($d(m)$)と記す。RS-VMは、定数個のベクトル変数、定数個のベクトル定数、拡大率 $d(m)$ の拡大/縮小演算、要素ごとの加減算、さらには通常のスカラー変数、スカラー命令を使用することができる。本稿では拡大率 $d(m) = 2$ のRS-VMについてのみ考察する。

3. 充足可能性問題

充足可能性問題は、リテラル $x_j, \bar{x}_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ の和より成る節 $c_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ の全てを真にするような変数への0と1の割当があるかどうかを問う問題である。

RS-VMへの入力は、2つのベクトル $C = (C_1 C_2 \cdots C_m)$, $N = (N_1 N_2 \cdots N_m)$ で与えられる。ただし、C を構成する各部分ベクトル C_i は、節 c_i を長さ n のベクトルに変換したもので、c_i に x_j または $\bar{x}_j$ が含まれるとき $C_i[j] = 1$ である。c_i に $\bar{x}_j$ が含まれるとき $N_i[j] = 1$ とする。その他の要素は全て0である。例えば、$n = 8$, $c_i = (x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_5 + x_8)$ のとき

$$
\begin{aligned}
C_i &= (01101001) \\
N_i &= (00101000)
\end{aligned}
$$

である。

<u>定理1.</u> RS-VM(2)は充足可能性問題を $O(n)$ 時間で解く。

証明の概略. 簡単の為に n と m は共に2のべきであるとする。アルゴリズムは次の(i),(ii)からなる。(i)長さ n の全ての0/1ベクトル(2^n 種ある)が部分ベクトルとして現れるベクトルを作る。長さ n の部分ベクトルは、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ への0/1の割り当てに相当する。次に、(ii)長さ n の部分ベクトルのうち $c_1, c_2, \cdots, c_m$ の全てを真にするような $x_1, x_2, \cdots, x_n$ への0と1の割当に対応するものがあるかを確認する。

(i) まず、定数ベクトル(0,1)に対し、*stretch* 演算を $\log n + \log m$ 回適用し、$(\overbrace{00\cdots0}^{n})^m(\overbrace{11\cdots1}^{n})^m$ を作る。このベクトルを、*repeat,stretch* することにより二つのベクトル

$$(\overbrace{00\cdots0}^{n})^m(\overbrace{11\cdots1}^{n})^m(\overbrace{00\cdots0}^{n})^m(\overbrace{11\cdots1}^{n})^m \tag{1}$$

$$(\overbrace{00\cdots0}^{n})^m(\overbrace{00\cdots0}^{n})^m(\overbrace{11\cdots1}^{n})^m(\overbrace{11\cdots1}^{n})^m \tag{2}$$

を得る。次に $\Omega(n) = (1, 2, \cdots, n)$ なるベクトルを $O(\log n)$ 時間で作成しておく(方法は略)。(1)に含まれる長さ n の4個の部分ベクトルの右から2番目の要素の値を(2)の同じ位置の要素に置き換える。このとき得られるベクトルを V とする。この置き換えには、

$$(\overbrace{0\cdots010}^{n})^m(\overbrace{0\cdots010}^{n})^m(\overbrace{0\cdots010}^{n})^m(\overbrace{0\cdots010}^{n})^m \tag{3}$$

なるベクトルを用いる。このベクトルは $\Omega(n)$ を $2 + \log m$ 回 *repeat* することにより $(1, 2, \cdots, n)^{4m}$ を作り、さらに $(n-1)^{4nm}$ と比較して一致した所を1として取り出すことにより作る。以下、ベクトル V を *repeat* し、(2)を *stretch* して3番目の要素を置き

Algorithms for natural problems on RS-Vector Machines
Chuzo IWAMOTO and Kazuo IWAMA
Faculty of Engineering, Kyushu University

換える、さらに同様の repeat と stretch を行ない４番目の要素を置き換える、というように n 番目の要素まで行なう。以上の方法により、

$$(\overbrace{0\cdots000}^{n})^m(\overbrace{0\cdots001}^{n})^m(\overbrace{0\cdots010}^{n})^m\cdots(\overbrace{1\cdots111}^{n})^m \quad (4)$$

が得られる。このベクトルを VX とおく。

(ii) 入力 C, N をそれぞれ n 回 repeat したベクトルをそれぞれ VC, VN とおく。VX, VC, VN はそれぞれ次のような構造を持つ。

$$\begin{array}{lllllllll} VX = & \overbrace{0\cdots00}^{n}, & \cdots & ,\overbrace{0\cdots00}^{n}, & \overbrace{0\cdots01}^{n}, & \cdots & ,\overbrace{0\cdots01}^{n}, & \cdots\cdots \\ VC = & C_1 & \cdots & C_m & C_1 & \cdots & C_m & \cdots\cdots \\ VN = & N_1 & \cdots & N_m & N_1 & \cdots & N_m & \cdots\cdots \end{array}$$

ベクトル VN に１が立っている要素に対応するベクトル VX の要素の０と１を反転させて、VX' とおく。VC と VX' の要素ごとの AND 演算（加減算で容易に実現可能）を行ない、各部分ベクトル内に少なくとも一つは“1”なる要素残るかどうかを確認する。つまり、その部分ベクトルに対応する c_i が真かどうかを確認する。さらに、$C_1, C_2, \cdots, C_m$ の全てを真にする $x_1, x_2, \cdots, x_n$ への０と１の割当が存在するかを確認する。∎

4. ハミルトン閉路問題

有向ハミルトン閉路問題は、与えられた有向グラフ G に対し全ての頂点をちょうど一回通過し出発点に戻る道が存在するかを問う問題である。

RS-VM への入力は、$n \times n$ の０と１の要素を持つ接続行列 I で与えられる。

$$I = \begin{pmatrix} e_{11}, & e_{12}, & \cdots & e_{1n}, \\ e_{21}, & e_{22}, & \cdots & e_{2n}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1}, & e_{n2}, & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

ここで、e_{ij} は、その値が１のときノード i から j への枝が存在することを意味する。このベクトルは分かり易いように正方形のマトリックス状に表したが、実際は単なる１次元ベクトルであることに注意されたい。

定理 2. RS-VM(2) は有向ハミルトン閉路問題を $O(n\log^2 n)$ 時間で解く。

証明の概略. 簡単の為に、n は２のべきとする。証明は次の (i),(ii) の手順をまず行なう。(i) $1\sim n$ なる要素を持つ長さ n なる全てのベクトル（n^n 種ある）を部分ベクトルとして含むベクトル

$$(\overbrace{1\cdots11}^{n})^{n^n},(\overbrace{1\cdots12}^{n})^{n^n},\cdots,(\overbrace{1\cdots1n}^{n})^{n^n},\cdots\cdots,(\overbrace{n\cdots nn}^{n})^{n^n} \quad (5)$$

を $O(n\log^2(n))$ 時間で作る（作成方法は省略する）。長さ n の部分ベクトルはノードをたどる経路を表したベクトルとみなす。つまり、部分ベクトルの i 番目の要素が j ならばノード i からノード j への有向枝を表すものとする。例えば $n = 4$ のとき、(3142) はノード１ →3, 2 →1, 3 →4, 4 →2 なる枝をたどることを意味する。ここで、各部分ベクトルの n^n 回の繰り返し構造の理由については後述する。この部分ベクトルの性質として、一つの部分ベクトルに含まれる枝の始点ノードは全て異なる。(ii) (i) で作った n 個のノードからなる組（部分ベクトル）の中から基本閉路（同じノードを２度以上通過しない閉路）を選ぶ。以下の議論では、特に動作時間について言及しないが、全て $O(n\log^2(n))$ 時間以内に収まっていることに注意されたい。部分ベクトルが表す経路が基本閉路であるためには、⟨1⟩ 全ての候補枝の始点ノードは異なる、⟨2⟩ 候補として選ばれた枝の終点ノードは異なる、⟨3⟩ 候補として選ばれた枝が入力グラフ G の枝集合 E の部分集合である。以下、⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨3⟩ を満たす部分ベクトルを順に選ぶ。⟨1⟩ は部分ベクトルの性質から既に満たされている。⟨2⟩ は、$\Omega(n)$ を $(2n+1)\log n$ 回 stretch することにより

$$(\underbrace{\overbrace{11\cdots1}^{n^{2n+1}}}_{\text{区間1}},\underbrace{\overbrace{22\cdots2}^{n^{2n+1}}}_{\text{区間2}},\cdots\cdots,\underbrace{\overbrace{n\cdots nn}^{n^{2n+1}}}_{\text{区間}n}) \quad (6)$$

を作る。(5) を $\log n$ 回 repeat して (5) が n 回繰り返した構造を持つベクトルを作り、さらに (6) と比較し値が一致した所に１を立てる。すると要素の値が全て異なる部分ベクトルのみ全ての区間で１が立つ（１区間の長さは (5) の長さと等しいことに注意）。この性質を利用して ⟨2⟩ を満たす部分ベクトルを選び出す。⟨3⟩ は省略する。

今、⟨1⟩,⟨2⟩,⟨3⟩ を満たさない部分ベクトルは既に (5) から取り除かれ、変わりに要素 $(\overbrace{00\cdots0}^{n})$ が置かれているとする。このベクトルを (5)' と呼ぶ。(5)' 上に残った部分ベクトルはグラフ G 上で基本閉路をなす。この時点では、(5)' はグラフ G 上に基本閉路を２個以上持つものも含んでいることに注意しなければならない。これらの部分ベクトルのうち長さが n の基本閉路を１つ含んだ部分ベクトルがハミルトン閉路となる。これを確認するため (5)' を $\log n$ 回 stretch し、$(\Omega(n))^{n^{2n}}$ と比較しマトリックスを作る。例えば、$n = 4$ においてある部分ベクトルが (3142) であった時、$\log n$ 回 stretch されて

$$\cdots\cdots(3333\,1111\,4444\,2222)\cdots\cdots \quad (7)$$

となる。これと

$$\cdots\cdots(1234\,1234\,1234\,1234)\cdots\cdots \quad (8)$$

を比較し値が一致する所に１を立てることにより

$$\cdots\cdots(\underbrace{0010}\,\underbrace{1000}\,\underbrace{0001}\,\underbrace{0100})\cdots\cdots \quad (9)$$

なるベクトルを作る。このベクトルは、

$$\begin{matrix}(0,0,1,0,\\ 1,0,0,0,\\ 0,0,0,1,\\ 0,1,0,0)\end{matrix} \quad (10)$$

なるマトリックスとみなす。このマトリックス（接続行列をなす）を C とおく。C と C の積を計算することにより、各基本閉路上の距離２の接続行列 C^2 を作る。（行列の積をつくるとき部分ベクトルの繰り返しの回数は $1/n$ となる。これは、(5) に含まれる各部分ベクトルの n^n 回の繰り返しと深い関係がある。）さらにこれと接続行列 C との積をとることにより距離３の接続行列 C^3 を作り、接続行列 C との積をとることにより距離４の接続行列 C^3 を作り、というように距離 n の接続行列まで作ってゆく。この過程で作られる各距離 $l(1 \leq l < n)$ の接続行列の対角要素（自己への遷移を表す）の全てが常に０で、しかも距離 n の接続行列の対角要素が全て１なら、ハミルトン閉路が存在する。∎

参考文献

[1] A. Bertoni, G. Mauri, and N. Sabadini,“A characterization of the class of functions computable in polynomial time on random access machines,” *Proc. 13th ACM Symp. on Theory of Computing*,pp.168-176, 1981.

[2] 岩間, “ベクトル機械の一つの標準形,” 信学技報, COMP88-22, 1988

[3] 岩本, 岩間, “RS 型ベクトル機械,” 信学技報, COMP90-72, 1990

[4] V. Pratt and L. Stockmeyer, “A characterization of the power of vector machines,” *J. Comput. Syst. Sci.*, vol. 12, pp. 198-221, 1976.