

映進対称性を持つフラクタル・テクスチャパターンの生成

福田 宏[†] 清水 道夫^{††}
植松 正吾^{†††} 勝 矢 光 昭[†]

符号付きポリオミノをジェネレータとして用いることによって、映進対称性を持つフラクタル・テクスチャパターンを生成する新しいアルゴリズムを提案する。そして、ジェネレータの条件を考察し、具体的な生成方法と生成図形を示す。

A Method of Generating Fractal Texture Patterns with Glide Symmetry

HIROSHI FUKUDA,[†] MICHIO SHIMIZU,^{††} SHOGO UEMATSU^{†††}
and MITSUAKI KATSUYA[†]

We propose the generating method of new regular fractal texture patterns with the glide symmetry by using the signed polyominoes. We consider the generating conditions of the patterns and describe the generating algorithm. Some generated patterns are illustrated.

1. はじめに

テクスチャ生成はコンピュータグラフィックス(CG)の主要な研究テーマの1つであり、自然界の形状を模倣する確率的なものと、要素図形が規則的に配置された美しいパターンを生成する周期的なものに大別される。前者は、ひび割れ¹⁾や石垣²⁾などのように色や形の変化が不規則なもので、近年CGの分野でその生成方法がさかんに提案されてきた。一方、後者には、「さやがた」などの日本の伝統的紋様³⁾や、結晶分野での空間群による対称模様^{3),4)}などがある。本稿は後者に関するもので、フラクタル理論⁵⁾を応用して新しい規則的なテクスチャ・パターンの生成方法を提案する。

フラクタル理論を応用したテクスチャ・パターンには、古典的なフラクタル図形であるドラゴン曲線、および、それを拡張した一群の図形が知られているが^{5),6)}、いずれも回転対称性のある周期パターン³⁾である。本稿で提案するパターンは、回転対称性ではなく、空間

群特有の対称性を備えた新しいパターンである。

2. pg パータイリング図形の生成

平面の周期パターンは、回転対称性、鏡映対称性、または映進対称性を持つことができる⁷⁾。映進対称性とは、並進と並進方向に平行な面での鏡映を同時に行う映進操作に関する対称性である。図1に示す周期パターンは、映進対称性を備えており、太矢線の方向に矢線の長さだけ並進した後、太矢線に沿って鏡映を行う映進操作に対して不変である。映進対称性を備えた周期パターンはpg(primitive glide)と記される⁷⁾。

平面の周期パターンに許される対称性のうち、回転対称性と鏡映対称性は、並進対称性を持たない有限な大きさの図形に対しても可能な対称性であるが、映進対称性は周期パターンでのみ可能な対称性である。それゆえ、映進対称性はタイリングに使われると美しいといわれている。タイリングとは、同じ形のモチーフを隙間も重なりもなく並べることである。絵画の巨匠エッシャーは多くのpgタイリング図形を描いている⁸⁾。

図1はpgであり、かつ9個の小正方形を集めたポリオミノ⁹⁾をモチーフとしたタイリング、すなわち、pgタイリング・パターンである。このタイリング・パターンは、1つのポリオミノに太矢線で示した映進と、細矢線で示した映進と直角方向の並進を繰り返すこと

[†] 静岡県立大学経営情報学部

School of Administration and Informatics, University of Shizuoka

^{††} 長野県短期大学教養学科

Department of Liberal Art, Nagano Prefectural College

^{†††} 静岡県立大学薬学部

School of Pharmaceutical Sciences, University of Shizuoka

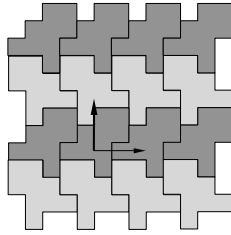


図1 pg タイリング・パターン
Fig. 1 A pg tiling pattern.

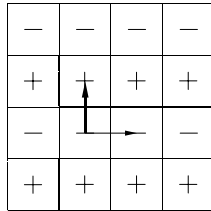


図2 イニシエータの pg パターン (P 型)
Fig. 2 pg pattern of initiator (P-type).

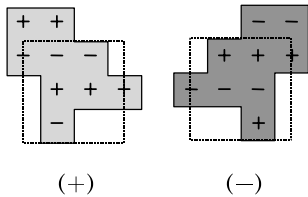


図3 ジェネレータ
Fig. 3 Generators.

で生成される．この生成操作をポリオミノと同じ面積の正方形に適用すると，図 2 に示す配列が得られる．正方形に付けられた符号 (+-) は鏡映の関係にある正方形を区別するものである．そこで，図 2 の符号付正方形を，それぞれ図 3 に示すようにポリオミノに置換すれば，図 1 の pg タイリング・パターンが得られる．そして，ポリオミノ内部の小正方形に図 3 のように符号を付ければ，符号付き小正方形も図 2 に示す pg パターンとなる．したがって，この符号付き小正方形に対しても図 3 の置換が可能である．すなわち，図 3 の置換操作は，再帰的に何回でも繰り返すことができる．そこで，置換前の符号付き破線正方形をイニシエータ，置換される内部の小正方形に符号のついたポリオミノをジェネレータと呼ぶことにする．

図 4 にイニシエータとジェネレータの再帰的置換操作を示す．図 4 (a) のように 1 つのイニシエータをジェネレータに置換し，図 4 (b) のようにそれを繰り返すと，やがて図 4 (c) のように周囲がフラクタル図形で囲まれた図形が得られる．さらに，置換を無限に

繰り返せば，ジェネレータの符号付き小正方形からもイニシエータと相似，または鏡映して相似な図形が得られる．図 4 (c) は，イニシエータが + 正方形，ジェネレータが 5 個の + 小正方形と，4 個の - 小正方形からできているので，自身 5 個と鏡映 4 個の合計 9 個で自身と相似な図形となる．なお，図 4 (c) はこの性質を見やすくするために 9 色で彩色してある．

また，イニシエータは，図 2 のように，平面を pg でタイリングするので，生成された図形，図 4 (c) も図 5 に示すように平面を pg でタイリングする．

自分自身を複数個集めると自身と相似になる図形はパーティリング図形と呼ばれる⁵⁾．図 4 (c) は，自分自身だけでなく，その鏡映図形も必要であるが，広い意味で，パーティリング図形と考えられる．そして，対称性 pg を持つので，我々はこの図形を pg パーティリング図形と呼ぶことにする．pg パーティリング図形は，ジェネレータ (符号付きポリオミノ) 内部の小正方形の数を N とすると，自身とその鏡映を合計 N 個集めると，自身を N 倍に拡大した図形かまたはその鏡映となる．以下ではジェネレータ内部の小正方形の数をジェネレータの大きさという．

3. ジェネレータの条件

本章では，前章に示したジェネレータのほかにも，どのようなジェネレータが可能であるかを述べる．正方形に映進と並進を繰り返して生成される pg パターンは，図 2 のパターン以外に，図 6 に示す映進面が正方形の中心を通らないパターンと，図 7 に示す映進面が正方形の辺と 45° の角度をなすパターンが存在する¹⁰⁾．ここで，映進面とは，映進操作の鏡映面のことである．このうち映進面が正方形の中心を通らない図 6 は，正方形の配列が乱れるので不適格である．したがって，可能なイニシエータのパターンは，図 2 に示した，映進面が正方形の中心を通るものと，図 7 に示した，映進面が正方形の辺に 45° に交わるもののいずれかである．これらをそれぞれ P 型，D 型と呼ぶことにする．

それぞれの型に対して，その型と同じ映進，並進操作でタイリングできるポリオミノが存在すれば，それは，その型のイニシエータに対するジェネレータとなりうる．なぜなら，その型のイニシエータをジェネレータに置換してもジェネレータ内部の小正方形が隙間も重なりもなく格子状に配列されるからである．

ポリオミノが pg タイリング可能である条件は，ポリオミノを構成する正方形の一边を 1，個数を N ，映進の大きさ (並進量) を p ，映進に直角な並進周期の $1/2$ (すなわち隣り合う映進面の間隔) を x とすると，

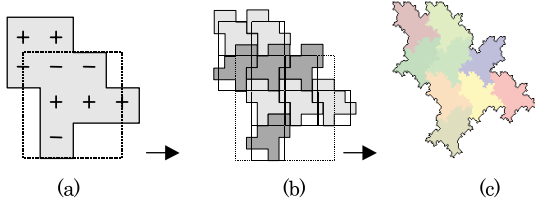


図4 pg パータイリング図形の生成
Fig. 4 Generation of the pg pertiling pattern.

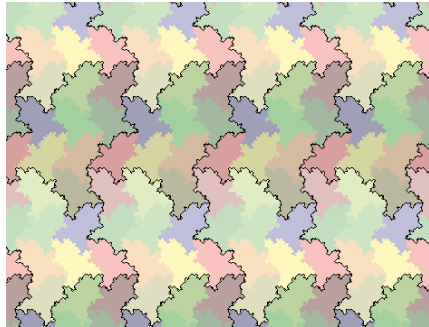


図5 pg パータイリング
Fig. 5 A pg pertiling.

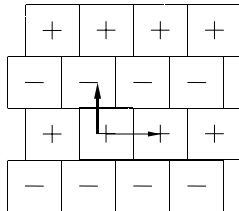


図6 イニシエータの pg パターン
Fig. 6 pg pattern of initiator.

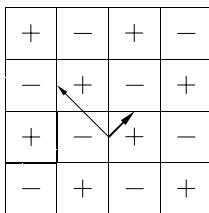


図7 イニシエータの pg パターン (D型)
Fig. 7 pg pattern of initiator (D-type).

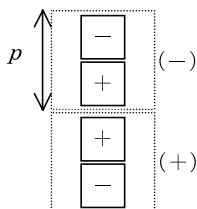


図8 P型 pg パターンを乱すジェネレータ
Fig. 8 A generator destroying the P-type pg pattern.

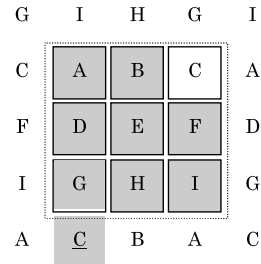


図9 ジェネレータの変形
Fig. 9 Deformation of a generator.

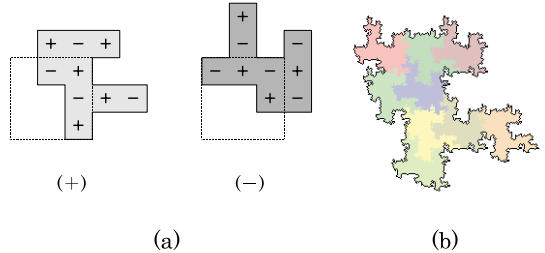


図10 ジェネレータと pg パータイリング図形 (D型)
Fig. 10 A generator and pg pertiling (D-type).

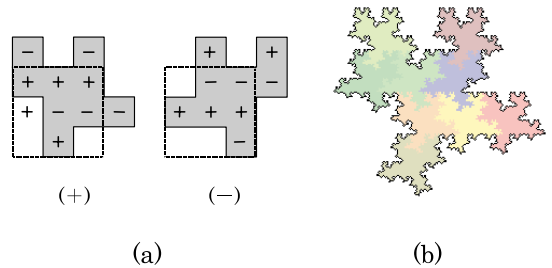


図11 ジェネレータと pg パータイリング図形 (PL型)
Fig. 11 A generator and pg pertiling (PL-type).

(図1, 図7では, 太矢線の長さが p , 細矢線の長さの $1/2$ が x)

$$2px = N \tag{1}$$

であり, p と x は映進面がポリオミノの辺に平行な場合

$$p = \frac{m}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ 2x = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2}$$

そうでない場合,

$$p = \frac{\sqrt{2}m}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ 2x = \sqrt{2}n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3}$$

に制限される¹⁰⁾. P型のイニシエータは $p = 2x$, D型のイニシエータは $p = x$ であるから, いずれの場合も,

$$N = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

でなければならない。

次に、イニシエータをジェネレータに置換した後にジェネレータ内部の小正方形の符号がイニシエータと同じパターンをとるために、 n は奇数に制限される。この理由を図 8 に示す P 型 $n = 2$ の例で説明する。この場合、式 (2) より $p = n$ であるが、 p はイニシエータの一辺の長さに等しいので、偶数の p では小正方形の符号が図 8 のように乱れてしまう。D 型の場合も同様に説明される。

以上より、ジェネレータとなりうるポリオミノは、大きさが奇数の 2 乗であり、かつ、映進面が格子に平行な P 型の場合には $p = 2x = n$ 、映進面が格子に対して 45° である D 型の場合には $p = x = \sqrt{2}n/2$ でなければならない。逆に、この条件を満たすジェネレータがすべて pg パータイリング図形を生成することは明らかである。特に、pg パータイリング図形のジェネレータの最小の大きさは、意味のある最小奇数 3 の 2 乗の 9 である。

4. ジェネレータの作成と生成パターン

pg パータイリング図形のジェネレータは、イニシエータを奇数の二乗個の小正方形に分割して、正方形のジェネレータを作り、その周囲に小正方形を追加、削除することで生成できる。この方法を図 9 に示す P 型のジェネレータを例として説明する。初期ジェネレータはアルファベット A~I が付された 3^2 個の正方形で構成される正方形のポリオミノである。

この正方形ジェネレータは、イニシエータを P 型に配置する規則に従って、平面を隙間なくタイリングする。この規則に従って、ジェネレータの周囲を、図のように、ジェネレータ内部のアルファベットに対応させることができる。この対応付けによって、ジェネレータの周囲に小正方形を追加、削除することができる。たとえば、ジェネレータの周囲 C の位置に小正方形を追加するには、ジェネレータ内部の小正方形 C を削除すればよい。したがってこの変形（追加）によって、灰色で示すジェネレータが得られる。このようにして、様々なジェネレータを作ることができる。

我々は、ジェネレータを作成し、pg パータイリング図形とテクスチャ・パターンを表示するソフトウェアを開発した¹¹⁾。以下にその出力結果の例を示す。図 10 (a) は D 型のジェネレータ、図 10 (b) は生成される pg パータイリング図形である。

なお、P 型のイニシエータに対しては、イニシエータとジェネレータの位置関係が 2 通り可能である。1

つは図 3 のようにイニシエータの辺がジェネレータの中心を通る場合であり、もう 1 つはイニシエータの辺とジェネレータの辺が一致する場合である。後者を PL 型と呼ぶことにする。図 11 に PL 型のジェネレータの例と生成される pg パータイリング図形を示す。

5. おわりに

本稿では、符号付きポリオミノをジェネレータに用いて pg パータイリング図形を生成する方法を提案し、それによって、多様なパターンを生成できることを示した。特に、大きなジェネレータに対しては、生成パターンはジェネレータに似た形となり、意図したテクスチャ・パターンの生成へも応用することができると思われる。今後に残された課題は、得られた図形の系統的な彩色方法、他の 2 次元空間対称性を持つ図形への拡張などである。

参考文献

- 1) 広田, 星野, 金子: 物理的モデルに基づくひび割れパターンの発生, 情報処理学会論文誌, Vol.37, No.12, pp.2235-2242 (1996).
- 2) 宮田一乗: 石垣パターンの生成方法, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), Vol.J75, No.1, pp.86-95 (1992).
- 3) 伏見康治: 紋様の科学, 数学セミナー (1967).
- 4) 野口, 浦野, 三浦: 2 次元空間群による対称模様の実現, No.209, 化学ソフトウェア学会 (2000).
- 5) Mandelbrot, B.B.: *The fractal geometry*, W.H. Freeman and Company, New York (1977).
- 6) Gardner, M.: An array of problems that can be solved with elementary mathematical techniques, *Scientific American*, Vol.216, pp.124-127 (1967).
- 7) Coxeter, H.S.M. and Moser, W.O.J.: *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer-Verlag, New York (1965).
- 8) Macgillavry, C.H.: *Symmetry aspects of M.C. Escher's periodic drawing*, The International Union of Crystallography (1976).
- 9) Klarner, D.A.: *The Mathematical Gardner*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston (1981).
- 10) Fukuda, H., Betumiya, T., Nishiyama, S. and Nakamura, G.: Two Topics on Plane Tiling, *KATACHI U SYMMETRY*, pp.231-238, Springer Tokyo (1996).
- 11) <http://kilin.u-shizuoka-ken.ac.jp/softs/softs.htm>

(平成 13 年 1 月 10 日受付)

(平成 13 年 3 月 9 日採録)