4B−10

# 記号ラプラス変換の応用

下地貞夫、○小林　晃、町田治夫

東京工科大学

## 1．はじめに

前報にのべた、記号ラプラス変換を用いて、数学的には最も簡単であるが、応用上重要な定数係数の線形常微分方程式の求解と、伝達関数の解析を行う試みについて述べたい。このタイプの微分方程式は演算子法によって解くことができ、ラプラス変換は逆演算子の取扱いが容易なので、記号ラプラス変換によって解を求めることができる。

未知関数をｙ、その微分を微分記号Ｄを用いてＤｙと表すと、微分演算の部分はＨ(Ｄ)ｙと表され、ｓをラプラス変換の変数とすると、いま扱う範囲の微分方程式に対しては、Ｈ(ｓ)はｓの多項式、逆演算子はｓの有理式、1/Ｈ(ｓ)である。初期値を含む項をＡ(ｓ)、外力の項をＦ(ｓ)とすると、ｙの像関数Ｙ(ｓ)は、

$$Y(s)=\frac{A(s)+F(s)}{H(s)} \qquad (1)$$

で、Ｆ(ｓ)は前方に述べた範囲の関数に対してｓの有理関数であるから、有理式のラプラス逆変換によって解が求められる。

## 2．微分方程式のラプラス変換

次のような手順で、像関数Ｙ(ｓ)を求める。独立変数をｔ、外力の項をｆ(ｔ)とする。

(1) Ｈ(Ｄ)とｆ(ｔ)の内挿表現→前置表現への変換、
(2) 演算子部分Ｈ(ｓ)の因数分解、
(3) 初期値からＡ(ｓ)を求める、
(4) ｆ(ｔ)のラプラス変換

普通、微分方程式の演算子部分は、Ｄの展開形式の多項式で与えられるので、第(2)項では、Ｄをｓに代えるとともにｓの多項式を因数分解しておく。ｆ(ｓ)はｓのモニックな多項式であり、根は整数と限ると、根の候補となる数を順々に入れて、式が０になるかどうかを見る、という原始的な方法で間に合う。重根が含まれている場合には、多重度を調べて、その次数の因子をくくり出すような処理が必要である。根の候補となる数は－９から＋９の間のものとした。

因数分解の例

(1) １次式の２乗

```
>(facts '(+ (^ s 2) (+ (* -8 s) 16)) 's)
(^ (+ S -4) 2)
```

(2) １次式と２次式の因子を含む場合

```
>(facts '(+ (^ s 6)
            (+ (* 2 (^ s 5))
               (+ (* -2 (^ s 4))
                  (* 8 (^ s 2))))) 'd)
(* (^ S 2) (* (^ (+ S 2) 2)
              (+ (^ S 2) (+ (* -2 S) 2))))
```

第(3)項の処理は、意外に手数を要するが、次のようにして行った。最高次の次数は10までとして、

$$\text{dlist0} = (0,\ y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_9) \qquad (2)$$

というリストを用意し、初期値を与えたときに、このリストの該当箇所にに、その数値が入るようにする。これとＨ(ｓ)のＡリスト表現を用いてＡ(ｓ)を作る。方程式の次数が、例えば４であれば、(nth 4 dlist0)とすると $y_3$ が取り出され、次の項の次数が２であれば、同様にして２番目の要素 $y_1$ が取り出される。最低次の項まで、この処理を行い、取り出された要素を集めて定数項が作られる。次に、dlist0の先頭に０を入れて、全体を右シフトしたdlist1用いると、ｓの１次の項が作られる。４階微分方程式では、Ａ(ｓ)は一般にｓの３次式であるから、dlist3まで用いる。

変換例

(1) $(D^2+3D+2)y$

```
>(dlapf '(+ (^ d 2) (+ (* 3 d) 2)) 'd 's)
(/ (+ (* Y0 S) (+ Y1 (* 3 Y0))) ; A(s)
   (* (+ S 1) (+ S 2))) ; H(s)は因数分解。
```

(2) $(D^2-8D+16)y$

```
>(dlapf '(+ (^ d 2) (+ (* -8 d) 16)) 'd 's)
(/ (+ (* Y0 S) (+ Y1 (* -8 Y0))) ; A(s)
   (^ (+ S -4) 2)) ; べき乗の因子を含む。
```

Application of Symbolic Laplace Transform
Sadao SHIMOJI, Akira KOBAYASHI, Haruo MACHIDA
Tokyo Engineering University

第(3)項のＦ(ｓ)は前報に従って求める。

## ３．求解

Ｆ(ｓ)の極とＨ(ｓ)の零点のうちのあるものが一致することがある。式(１)の分母の重複因子が、まとめられていないと、部分分数分解の際に不都合を生じるので、先ずこれを整理する。

従って、像関数のラプラス逆変換は、次のような手順で処理する。

(1) 分母の重複因子の整理、
(2) 像関数Ｙ(ｓ)の部分分数分解
(3) 各部分分数に対するラプラス逆変換、
(4) ｙ(ｔ)の前置表現→内挿表現への変換。

重複因子の整理の例

(1) 一次因子の繰り込み；

```
>(factf '(* (+ S 1)
            (* (+ S 3)
               (* (+ S 2) (+ S 1)))) 's)
(* (^ (+ S 1) 2) (* (+ S 3) (+ S 2)))
```

(2) べき乗の因子の繰り込み；

```
>(factf '(* (^ (+ S 1) 2)
            (* (+ S 3) (* (+ S 2)
                          (+ S 1)))) 's)
(* (^ (+ S 1) 3) (* (+ S 3) (+ S 2)))
```

分母がこのように整理されると、解の像関数Ｙ(ｓ)は変数ｓの有理式であるから、前報に述べた部分分数分解と逆変換は容易にできて、ｙ(ｔ)が求められる。

実行例

(1) １階微分方程式、

```
>(setq i0 2)；初期条件
>(soldf '(d + 1) '(exp (- t)) 't 'd 's)
(2 * (EXP (- T)) + T * (EXP (- T)))
```

(2) ２階微分方程式、

```
>(setq i0 0 i1 0)；初期条件
>(soldf '(d ^ 2 - 5 * d + 6)
        '(exp t) 't 'd 's)；右辺が指数関数
(1/2 * (EXP T) + 1/2 * (EXP (3 * T))
               + (- (EXP (2 * T))))
```

(3) ２階微分方程式、

```
>(setq i0 0 i1 0)；初期条件
>(soldf '(d ^ 2 + 2 * d)
        '(cos t) 't 'd 's)；右辺が三角関数
(-1/5 * (COS T) + 2/5 * (SIN T)
                + 1/5 * (EXP (-2 * T)))
```

(4) ３階微分方程式、

```
>(setq i0 0 i1 0 i2 1)；初期条件
>(soldf '(d ^ 3 + 4 * d)
        't 't 'd 's)；右辺はｔ
(3/16 + 1/8 * T ^ 2
      + -3/16 * 1 / (SQRT 4)
              * (COS ((SQRT 4) * T)))
```

## ４．むすび

記号ラプラス変換の応用として、定数係数の線形常微分方程式の求解に関する試みを述べた。像関数の逆変換は、分母の因子数が５とか６になり、また、これがべき乗で含まれていると、手計算では無理である。しかし、計算機処理では容易に逆変換を行って、解を求めることができる。

記号ラプラス変換を実際の問題、例えばオート・パイロットの設計における伝達関数の解析に適用しようとして、生じた研究課題は像関数の整理と簡約であった。このような課題に関する研究を進めながら、数式処理の応用を開拓して行きたいと考えている。

これまで、有用性は認められてはいるが、計算が面倒なために応用が見送られている公式が多い。数式処理を行うことによって、このような公式が実際の分野で活用されることを期待したい。

## 参考文献

[1] 佐々木建昭、元吉文男、渡辺隼郎、
数式処理システム、昭晃堂、1986
[2] Davenport,J.H., Siret,Y., Tournier,E.,
Computer Algebra, Academic Press, 1988
[3] 数式処理、アーカイブ No 12、ＣＱ出版、1990
[4] 下地貞夫、数式処理、森北出版、近刊