4B−7

陰的Runge-Kutta法の特性と最適化(3段数5次法)

田中 正次 穂苅 康彦 山下 茂

山梨大工学部

§1. まえがき

我々は数年前、安定性を支配するパラメータβ_0を変数とする打ち切り精度最良の2段数3次, 3段数5次, 及び4段数7次陰的Runge-Kutta法を導いた。その公式は、Butcherの2段数4次, 3段数6次, 及び4段数8次法などを特別な場合として含んでいる。次に一例として我々の導出した3段数5次法を掲げよう。

【3段数5次法】

$$
\begin{array}{c|ccc}
c_1=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} & a_{11}=\dfrac{1+8\beta_0}{36} & a_{12}=\dfrac{5+6\sqrt{15}+40\beta_0}{180} & a_{13}=\dfrac{20+3\sqrt{15}-20\beta_0}{45} \\
c_2=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10} & a_{21}=\dfrac{5-6\sqrt{15}+40\beta_0}{180} & a_{22}=\dfrac{1+8\beta_0}{36} & a_{23}=\dfrac{20-3\sqrt{15}-20\beta_0}{45} \\
c_3=\dfrac{1}{2} & a_{31}=\dfrac{20-3\sqrt{15}-20\beta_0}{72} & a_{32}=\dfrac{20+3\sqrt{15}-20\beta_0}{72} & a_{33}=\dfrac{-1+10\beta_0}{18} \\
\hline
 & b_1=\dfrac{5}{18} & b_2=\dfrac{5}{18} & b_3=\dfrac{4}{9}
\end{array}
\qquad (1.1)
$$

ここで$\beta_0=a_{11}+a_{22}+a_{33}$で、上式は与えられた$\beta_0$に対して打ち切り精度最良の公式である。(1.1)で$\beta_0=1/2$とおけばButcherの3段数6次法が得られる。

この研究の目的は、自由パラメータβ_0と打ち切り精度や安定性の関係を調査し、それに基づいて数値解の精度が最良になるようにβ_0を決定することである。

§2. 公式(1.1)の打ち切り誤差とその大小判定

公式(1.1)は5次法であるから、その局所打ち切り誤差は、

$$T_n = h^6\sum_{j=1}^{20} a_{6j}\, g_j(x_n, y_n) + O(h^7) \qquad (2.1)$$

とかくことができる。ここでa_{6j}は公式の係数のみの関数で、g_jはfに依存して定まる関数ベクトルである。

【定義1】 打ち切り精度判定基準

$$A_{62} = \sum_{j=1}^{20} |a_{6j}| \qquad (2.2)$$

$$A_{63} = \sum_{j=1}^{20} a_{6j}^2 \qquad (2.3)$$

(2.2),(2.3)によって定義される数量A_{62}, A_{63}を、公式(1.1)の打ち切り精度判定基準という。

特に公式(1.1)の場合

$$A_{62}=\alpha\,|(2\beta_0-1)/360| \qquad (2.4)$$

$$A_{63}=\{(2\beta_0-1)/360\}^2 \qquad (2.5)$$

となる。ここでαは適当に選ばれ正定数である。

On characteristics and optimization of implicit Runge-Kutta methods
Masatsugu TANAKA Yasuhiko HOKARI Shigeru YAMASHITA
Yamanashi University

§3. 公式(1.1)の安定性とその評価

テスト方程式　$y' = \lambda y$（λは複素定数）　(3.1)

に公式(1.1)を適用したときの数値解をy_n, $e_n=y_n-y(x_n)$, E_nを局所誤差とすると、

$$e_{n+1} = R(h\lambda, \beta_8)e_n + E_n \tag{3.2}$$

が成立する。ここで安定関数$R(h\lambda, \beta_8)$は、

$$R(h\lambda, \beta_8) = \frac{1+(1-\beta_8)h\lambda-(\beta_8/2-7/20)h^2\lambda^2-(\beta_8/12-1/20)h^3\lambda^3}{1 \quad -\beta_8 h\lambda+(\beta_8/2-3/20)h^2\lambda^2-(\beta_8/12-1/30)h^3\lambda^3} \tag{3.3}$$

で与えらる。絶対安定，絶対安定領域，絶対安定区間は通常の定義に従うものとする。ここでは安定性の優劣は、絶対安定領域Sの包含関係，安定関数$R(h\lambda, \beta_8)$の絶対値の大きさ，絶対安定領域の面積A(S)，不安定領域S^cの面積$A(S^c)$（Sが有限でないとき）などによって評価される。

§4. 既知公式の比較

Butcherによる３段数６次法、我々による公式(1.1)及びL安定な公式の三者の比較を試みる。これらの判断の根拠となった資料は残念ながら紙面の都合で割愛する。

(イ)Butcherの公式（β_8=1/2の場合）

打ち切り精度は最良で６次である。またA安定であるがこの公式は臨界的である。したがって係数の誤差によっては、A安定でなくなる可能性がある。

また、$h\lambda$の大きい値に対しては$|R(h\lambda, 1/2)| \fallingdotseq 1.0$になり誤差伝播特性が悪い。

強Stiff問題などに対して十分有効な安定性を持つかどうか疑問である。

(ロ)L安定な公式（β_8=0.6）

$h\lambda$の大きい値に対しては$|R(h\lambda, 0.6)| \fallingdotseq 0.0$となり、

誤差伝播特性は著しくよく、また打ち切り精度もかなりよい。

(ハ)β_8=0.7に対応する我々の公式

最大絶対安定領域をもつ。

$h\lambda$の大きい値に対しては$|R(h\lambda, 0.7)| \fallingdotseq 1/3$で誤差伝播特性はButcherより著しくよい。また、打ち切り精度もかなりよいが一層の改良が必要。

(ニ)β_8=0.55に対応する我々の新公式

$|R(h\lambda, 0.55)|$で見る安定性は著しくよい。

打ち切り精度も(ロ),(ハ)で提案する公式に優る。

絶対安定領域も最大に近い。

かなり使える公式ではないかと考えられる。

《参考文献》

1. Butcher, J.C., The Numerical Analysis of Ordirnary Differential Equations, John Wiley & Sons(1987)
2. Hall, G. and Watt, J.M., Modern numerical methods for ordinary differential eqations, Clarendon Press. Oxford(1976)
3. 山下 忠志, 陰的Runge-Kutta法の特性について, 昭和60年度山梨大学計算機科学専攻修士論文
4. 三村 和正, 低段数陰的Runge-Kutta法の特性とその誤差評価に関する研究, 昭和62年度山梨大学計算機科学専攻修士論文
5. 杉田 佳代, 田中 久恵, ４段数陰的Runge-Kutta法について, 昭和63年度山梨大学計算機科学科卒業論文
6. 田中，穂苅，山下，陰的Runge-Kutta法の特性と最適化，数値計算と科学計算(1990)