2B－7　ＣＧを利用した三角関数における加法定理，積和公式証明法

井上秀一
関東第一高等学校

1．はじめに

数学教育における生徒指導で、教具・教育機器の適切な導入は、情報伝達の媒介として、場面設定の手段として有効である。今日教育機器としてのコンピュータの利用方法が取り沙汰されているが、数学科における利用の一つとしてアニメーションやシミュレーションを提示する機器としての活用は今までの授業では実現し難かった動的な数学現象を提示することを容易にした。数学的知識獲得のために大いに役立つものと考える。

著者は、コンピュータ・グラフィックスを利用して三角関数における加法定理、積和公式の証明を視覚的に表現する方法を研究し、かなり有効な方法を見出したので、その成果をここに報告する。

2．方法の概要

高等学校の教科書における加法定理の一般的な証明は、単位円上における２点間の距離を利用した方法であり、積和公式については加法定理から導いている。

本方法は、等式の両辺を面積として捉え、等積変形、（回転・平行・対称）移動の操作によって証明した。紙面の都合上、本方法の一部のものについてのみ示す。

図１は $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ・・・・・・(a) の証明である。

図１(1)のように角 α，β をとると △AOBの面積は 1/2 $\sin(\alpha+\beta)$ となり、等式(a)の左辺の半分の面積を表す。(2)の図で AC // DB より等積変形を行い(3)から(4)の図のようになる。(5)の図で AE // GO // BF より等積変形を行い(5)から(6)の図のようになる。(6)の図から面積は，1/2 $(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$ となる。これは等式(a)の右辺の半分の面積を表す。よって(1),(6) の図より等式(a)についての証明が得られる。なお、図(1)から(6)に至る部分はアニメーションで示した。

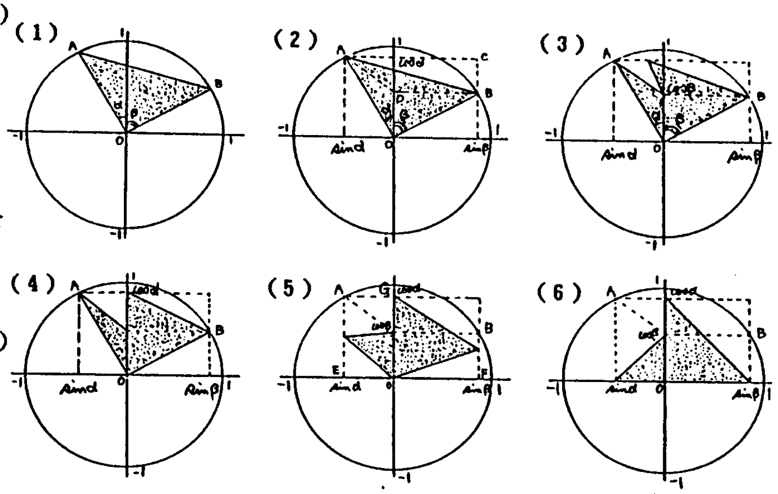

図 1　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ の証明

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ については略すがこれも同様に証明される。

図２は $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ の証明である。

A graphic method,especially suitable to education using computer graphics,of proof for addtion theorem and related formulae in trigonometric function.

Shuuichi Inoue
Kantoudaiichi High School

図２の(1)のように角α，βをとると、点で囲まれた３つの四角形の面積の和は$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$となり(2)では(1)の面積の1/2である(2)の図で EO//AC，BE//COより等積変形を行うと(4)の図のように△AOBができる。ここで△AOBを原点を中心に角αだけ回転させると(6)の図になり面積は$1/2\cos(\alpha+\beta)$であることがわかる。よって(2)(6)の図より証明される。

$\cos(\alpha-\beta)$
$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
の証明については略すが、これも同様に証明される。

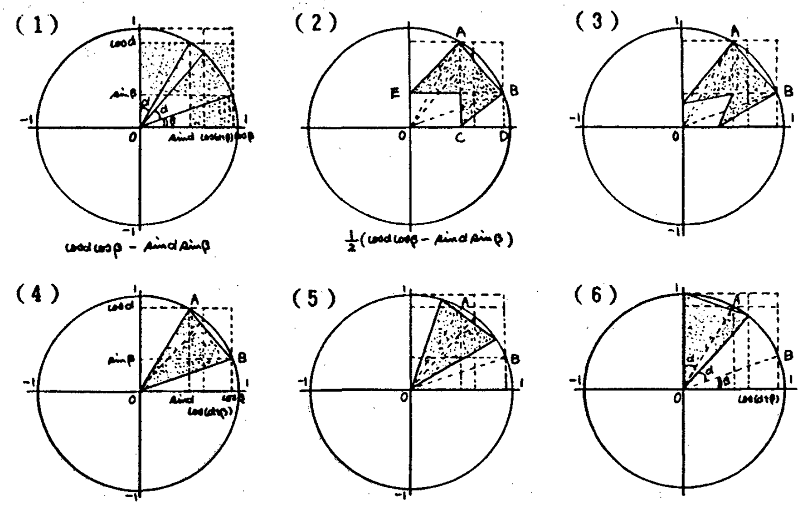

図２ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ の証明

図３は、積和公式
$\sin\alpha\sin\beta$
$=1/2\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$
の証明である。

図３ (1)のように角α，βをとると、四角形の面積は、$\sin\alpha\sin\beta$となる。(2)の図のようにあらたに角をとる。(3)の図より２つの三角形が得られる。ここで縦軸に平行な部分について等積変形を行い(4)の図のようになる。(4)の図で２つの三角形を角βだけ回転移動させると(5)の図が得られる。AB//CD より等積変形を行い(6)の図がえられる。(6)の図の第一，第二象限と第四象限で２つの図形の面積の差をとると(7)図のようになる。(7)の図の縦軸と平行な部分で等積変形を行う。(9)と(1)の図より証明される。 $\cos\alpha\cos\beta=1/2\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$，
$\sin\alpha\cos\beta=1/2\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ についても同様に証明される。

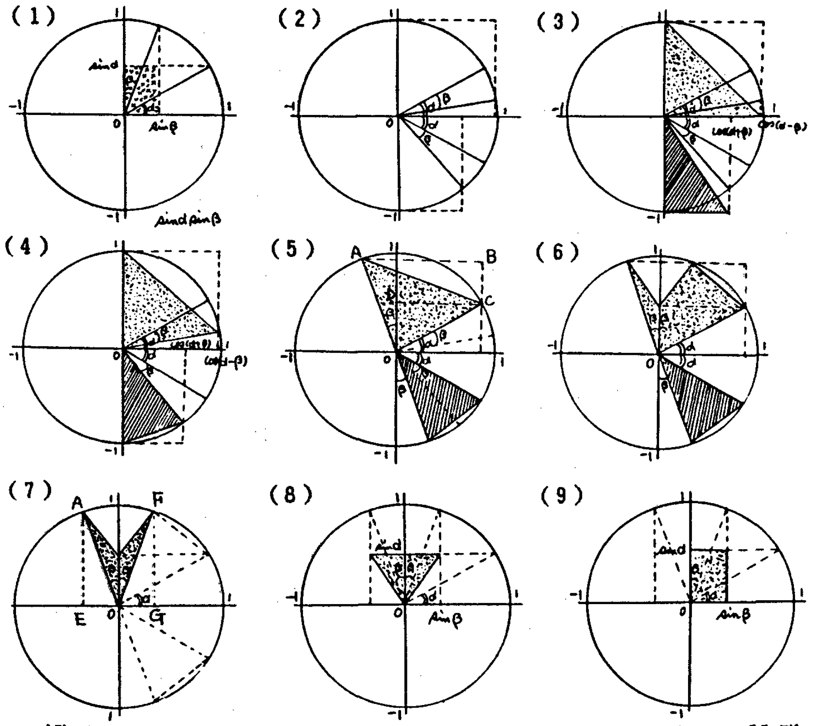

図３ $\sin\alpha\sin\beta=1/2\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$ の証明

３．おわりに

本稿で提案した方法は、角度のとり方に制約があるが視覚的に理解するのは容易であると思われる。授業のなかで一般的な証明の後に本方法を利用すれば理解度、印象度が増し、ともすれば無味乾燥になりやすい三角関数の定理の証明に興味を持って取り組む生徒が出てくれることを願っている。今後さらに工夫を重ね、より簡潔なものにして行きたい。また、他の教材についても本方法のようなアルゴリズムを考えて行きたい。