

非周期的自己アフィンタイル貼りにおける タイルの境界集合の構成と彩色

貞 広 泰 造[†] 櫻 井 幸 一^{††}

多くの自己アフィンタイルは境界がフラクタル集合となる。本稿では Pisot タイル貼りと呼ばれるある非周期的な自己アフィンタイル貼りの族についてそのフラクタル状の境界を表現するグラフ(有限オートマトン)を構成するアルゴリズムを与える。またその結果を用いてタイルの彩色関数を構成する。

Construction of Boundaries of Tiles in Non-periodic Self-affine Tilings and Their Colorings

TAIZO SADAHIRO[†] and KOICHI SAKURAI^{††}

Most of self-affine tiles have fractal boundaries. We show an algorithm to construct finite graphs (or finite automata) which represent the boundaries of tiles in a special class of self-affine tilings which we call Pisot tilings. We also show an algorithm to construct colorings of these tilings using this graphs.

1. はじめに

内点全体の閉包が自身と一致するような \mathbb{R}^n のコンパクトな部分集合をタイルと呼ぶ。 \mathcal{T} をあるタイルの集合とする。 \mathcal{T} は以下の 3 つの性質を持つときタイル貼りと呼ばれる。

- \mathcal{T} の有限部分集合 S がとれてすべての $T \in \mathcal{T}$ は S のいずれかの元を平行移動したものとなる。
- \mathcal{T} は空間を埋め尽くす：

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T.$$

- \mathcal{T} の異なる 2 つのタイルは内点で交わらない。タイル貼り \mathcal{T} に対してあるアフィン変換 A があってすべてのタイル $T \in \mathcal{T}$ に対して $A(T)$ が \mathcal{T} に属するいくつかのタイルの和集合と等しくなるとき \mathcal{T} を自己アフィンタイル貼りと呼ぶ。

自己相似あるいは自己アフィンタイルはコンピュータの発達とともに活発に研究されはじめた。これらが出現した背景にはトーラスの双曲型同型写像が引き

起こす力学系のマルコフ分割の構成^{8),9)} や、ウェーブレット変換で用いられる Haar 型基底の構成といった問題があった^{6),11)}。また、準結晶のモデルとしても重要である^{10),12),14)}。

多くの自己アフィンタイルの境界集合はフラクタル集合となる。境界集合の構成法や次元の計算方法に関して、文献 2), 5), 14), 16) 等で報告されている。Wang らは文献 16) で整数型と呼ばれる周期的な自己相似タイル貼りに対してタイルの境界集合のハウスドルフ次元を計算する方法を与えている。この計算にはタイルの隣接関係を判定する方法が必要とされ、Wang らはグラフ(有限オートマトン)を用いた判定方法を与えている。これら周期的タイル貼りにおいてはタイルどうしの隣接関係や境界集合は原点付近での様子が分かればすべて分かる。

我々はこの方法を拡張し Pisot タイル貼りと呼ばれる非周期的なタイル貼りに適用する。Pisot タイル貼りは Thurston によって導入されたタイル貼りで Pisot 数を基とする数の展開表示から得られる¹³⁾。図 1 は Pisot タイル貼りの一例である。 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ は

$\alpha = -0.419643377607 \dots - 0.60629072920719 \dots i$ を 1 つの根とする。

[†] 熊本県立大学総合管理学部

Faculty of Administration, Prefectural University of Kumamoto

^{††} 九州大学大学院システム情報科学研究科情報工学専攻

Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

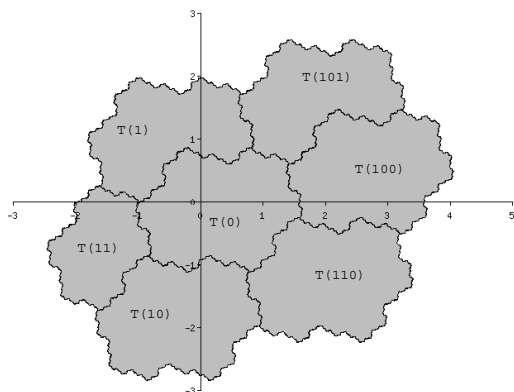


図 1 $x^3 - x^2 - x - 1$ の根から生成される Pisot タイル貼り
 Fig.1 Pisot tiling generated by roots of $x^3 - x^2 - x - 1$.

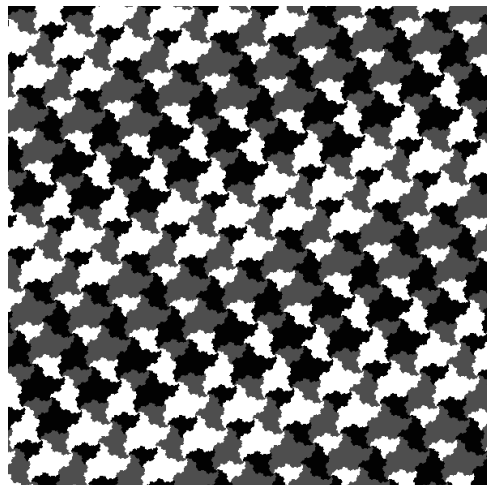


図 2 3-彩色可能な Pisot タイル貼りの一例
 Fig.2 A 3-colorable Pisot tiling.

$$T(0) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n : a_n \in \{0, 1\}, a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} = 0 \right\}.$$

$$T(1) = \left\{ \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \alpha^n : a_n \in \{0, 1\}, a_{-1} = 1, a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} = 0 \right\}.$$

$$T(10) = \left\{ \sum_{n=-2}^{\infty} a_n \alpha^n : a_n \in \{0, 1\}, a_{-2} = 1, a_{-1} = 0, a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} = 0 \right\}.$$

$$T(11) = \left\{ \sum_{n=-2}^{\infty} a_n \alpha^n : a_n \in \{0, 1\}, a_{-2} = 1, a_{-1} = 1, a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} = 0 \right\}.$$

...

のように $\{0, 1\}$ の列 w に対して 1 つのタイル $T(w)$ が決まる．つまり w はタイルの要素の級数の主要部分の係数を定める．容易に分かるように

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}T(0) &= T(0) \cup T(1). \\ \alpha^{-2}T(0) &= T(0) \cup T(1) \cup T(10) \cup T(11). \\ \alpha^{-3}T(0) &= T(0) \cup T(1) \cup T(10) \cup T(11) \cup T(100) \cup T(110) \cup T(101). \\ &\dots \end{aligned}$$

である．これらが(タイル貼りになることはさておき,)自己相似性を持つことが分かる．我々はタイルの境界がタイルどうしの共通部分となる場合に,その構成を次の問題に帰着させる:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \alpha^n &= 0 \\ a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} &= 0, \\ b_n \cdot b_{n+1} \cdot b_{n+2} &= 0 \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

となるような $\{0, 1\}$ の列の組 $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ はどのようなものか?

これらの列があるオートマトンによって受理されることを示し,同時にこのオートマトンの構成方法を述べる．このオートマトンを用いてタイルの隣接関係を判定することができ,また,境界集合が典型的なフラクタル集合である graph directed set³⁾ となることが分かる．

またタイルの彩色について考察する．隣接するタイルどうしが同じ色で塗られないように有限色を使ってそれぞれのタイルに配色するのである．よく知られているように有限グラフの 3-彩色可能性判定問題は NP-完全問題である⁴⁾．空間全体のタイル貼りに対応するグラフは無限グラフとなり,3-彩色可能性の判定は一般に難しく,たとえば kite と dart によるペンローズタイル貼りが 3-彩色可能かどうかは未解決問題である¹⁵⁾．この難しさはタイル貼りの非周期性から生ずる．我々は Pisot タイル貼りのある彩色方法を述べる．この方法はタイル貼りの 3-彩色可能性や 4-彩色可能性を完全に判定するものではない．また,任意の

平面 Pisot タイル貼りに対応するグラフが平面グラフとなるかどうかは分かっていない。しかし、与えられた例に対してこの方法を適用し彩色可能性の十分条件を与えることができる。たとえば図 2 はこの方法で 3-彩色可能性が示された非周期的タイル貼りの一例である。タイル貼りから整数格子への単射で隣接する 2 つのタイルの像の間の距離が定数でおさえられるもの (アドレス写像¹⁰⁾) を用いてこれらの非周期的タイル貼りの彩色関数を構成する方法を述べる。タイルが埋め込まれた格子をある方法で周期的に配色し、それをタイル貼りに引き戻す。また、いくつかの具体例について詳しく計算結果を示す。

2. Pisot タイル貼り

本稿ではこの Pisot タイル貼りを文献 1) に従って扱う。Pisot タイル貼りは Pisot 数と呼ばれる代数的整数によって定まる。タイルの各要素は Pisot 数の有理数体上の共役を基とする巾級数で表され、それらの係数列はあるオートマトンによって定められる。与えられた Pisot 数から巾級数の基とオートマトンを定め、タイルを構成する方法について以下に示す。

G を (有向ラベル付き) グラフとする。 G の頂点集合を $\mathcal{V}(G)$ で、辺集合を $\mathcal{E}(G)$ で表す。辺 e の出発点を $s(e)$ 、終着点を $t(e)$ で表す。すべての辺 e はラベル $l(e) \in \Sigma(G)$ を持つ、ここに $\Sigma(G)$ は有限集合で G のアルファベットと呼ばれる。辺の列 $e_1 \cdots e_l$ は $t(e_i) = s(e_{i+1})$ を満たすとき道と呼ばれる。本稿ではすべてのグラフは初期状態と呼ばれる特別な頂点を 1 つだけ持つものとし、グラフ G の初期状態を i_G と表す。アルファベット Σ 上のすべての語の集合を Σ^* で表す。

語 $w = a_1 \cdots a_l \in \Sigma^*$ に対して初期状態から出発する G の道 $p = e_1 \cdots e_l$ があって $l(e_1) \cdots l(e_l) = w$ となるとき w は G に受理されるという。 Σ^* の任意の部分集合を言語と呼ぶ。 G によって受理される語全体の集合を $L(G)$ で表し、言語 L は $L = L(G)$ であるとき G に受理されるという。あるグラフ G に受理される言語を正規言語⁷⁾ と呼ぶ。 Σ の無限列 $(a_i)_{i \geq 0}$ を無限語と呼ぶことにする。無限語 $(a_i)_{i \geq 0}$ がすべての $h \geq 0$ に対して $a_0 \cdots a_h \in L(G)$ であるとき G に受理されると定義する。 $X(G)$ で G に受理される無限語全体の集合を表すことにする。

グラフ H のすべての頂点の組 x, y に対して x と y を結ぶ道があるとき H は強連結であるという。 G の部分グラフ H が強連結であってそれを含むどのような H と異なる部分グラフも強連結にならないとき、

H を G の強連結成分と呼ぶ。本稿では単一の頂点はその頂点を始点、終点とする辺がない場合は強連結成分とは呼ばない。

1 より大きな実の代数的整数で自身を除く有理数体上の共役元すべてが 1 より小さな絶対値を持つものを Pisot 数と呼ぶ。Pisot 数で単数となるものを Pisot 単数と呼ぶことにする。 β を有理数体上 d 次の Pisot 単数とし、 β の β 以外の有理数体上の共役を

$$\{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}, \alpha^{(r+1)}, \overline{\alpha^{(r+1)}}, \dots, \alpha^{(r+c)}, \overline{\alpha^{(r+c)}}\}$$

とする。ここで $1 \leq i \leq r$ に対して $\alpha^{(i)} \in \mathbf{R}$ 、 $r+1 \leq i \leq r+c$ に対して $\alpha^{(i)} \notin \mathbf{R}$ とする。 $\bar{\alpha}$ は α で複素共役を表す。したがって $r+2c = d-1$ となる。

β を Pisot 単数とし a を非負の実数とする。 a の β -展開は以下のようにして定義される。実数 y の整数部分を $[y]$ で小数部分を $\{y\}$ で表す。 k を $\beta^k \leq a < \beta^{k+1}$ となる最小の整数とする。

$$a_k = [a/\beta^k], r_k = \{a/\beta^k\}$$

とし、 $k > i > -\infty$ に対して

$$a_i = [\beta r_{i+1}], r_i = \{\beta r_{i+1}\}$$

とおく。すると

$$a = a_k \beta^k + a_{k-1} \beta^{k-1} + \dots$$

という a の展開を得られる。これを a の β -展開と呼ぶ。

$$\Sigma_\beta = \{0, 1, \dots, [\beta]\}$$

とし、 L_β を Σ_β 上の語 $a_h a_{h-1} \cdots a_0$ で $a_h \beta^h + a_{h-1} \beta^{h-1} + \dots + a_0$ が β -展開となるもの全体の集合とする。このとき、グラフ G で $L(G) = L_\beta$ となるものがある。 G の構成法を Thurston¹³⁾ に従って簡単に説明する。

まず、 β の carry 列と呼ばれる Σ_β の列 $(c_n)_{n \geq 0}$ を計算する。 $x_0 = 1$ とし、 $n > 0$ に対して c_n を βx_{n-1} より小さな最大の整数とする。

$$x_n = \beta x_{n-1} - c_n$$

とおき、以下同じように続ける。こうして得られる列 $c_1 c_2 c_3 \cdots$ は β が Pisot 数のとき先頭の有限個の並びを除き周期的になる¹³⁾。この列を $\text{carry}(\beta)$ で表す。つまり整数 p, q で $k > q$ なる k に対して $c_{k+p} = c_k$ となるものが存在する。このとき、

$$\text{carry}(\beta) = c_1 \cdots c_q (c_{q+1} \cdots c_{q+p})^\infty.$$

と表記することにする。

例 1. $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$ とする。すると β の共役 $\alpha = (1 - \sqrt{5})/2$ の絶対値は 1 より小さく β は Pisot

数となる. $1 < \beta \cdot x_0 = \beta < 2$ より, $c_1 = 1$,
 $x_1 = \beta \cdot 1 - 1, \beta(\beta - 1) = 1$ より, $c_2 = 0$,
 $x_2 = \beta \cdot (\beta - 1) - 0 = 1 = x_0$. よって

$$\text{carry}(\beta) = (10)^\infty.$$

次に G に頂点集合を

$$\mathcal{V}(G) = \{0, 1, \dots, p + q - 1\}$$

のように与える. 初期状態は $i_G = 0$ とする. G に辺を以下のように与える. 状態 $0 \leq n < p + q - 1$ に対して n から $n + 1$ へ向かう c_{n+1} でラベルされた辺をとり, $p + q - 1$ から q へ c_{p+q} でラベルされた辺をとる. すべての $n \in \mathcal{V}(G)$ と $l \in \Sigma_\beta$ とについて, $l < c_{n+1}$ ならば n から 0 への l でラベルされた辺を与える. 図 3 は $\text{carry}(\beta) = ab(cdef)^\infty$ のときの G である.

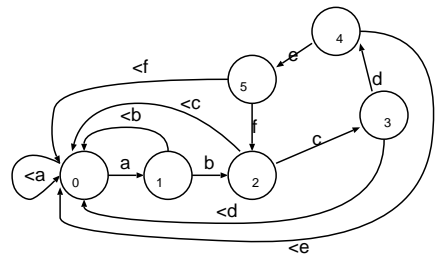


図 3 $\text{carry}(\beta) = ab(cdef)^\infty$
 Fig. 3 $\text{carry}(\beta) = ab(cdef)^\infty$.

L^R で言語 L の逆を表す, つまり,

$$L^R = \{a_0 a_1 \dots a_l; a_l a_{l-1} \dots a_0 \in L\}$$

である. 正規言語の逆は正規言語となる⁷⁾. つまり, ある言語 L があるグラフ G に受理されるとき L^R を受理するグラフがある.

例 2. β を $x^d - x^{d-1} - \dots - x - 1$ の実根とする. このとき β は Pisot 数となり, $\text{carry}(\beta) = (\overbrace{11 \dots 1}^{d-1 \text{ times}} 0)^\infty$ となる. 図 4 のグラフは L_β を受理する. この場合は

$$L_\beta = L_\beta^R = \{a_0 a_1 \dots a_l; a_i \in \{0, 1\}, a_i \times a_{i+1} \times \dots \times a_{i+d-1} = 0, 0 \leq i \leq l - d + 1\}.$$

である.

β を Pisot 単数, Σ を整数の有限集合とし, Σ を係数とする Laurent 級数の集合を

$$F_\Sigma = \left\{ \sum_{n=l}^\infty a_n x^n; a_n \in \Sigma, l \in \mathbf{Z} \right\}.$$

と表す. 次に写像 $\pi_\beta: F_\Sigma \rightarrow \mathbf{R}^r \times \mathbf{C}^c \simeq \mathbf{R}^{d-1}$ を次のように定める.

$$\pi_\beta: f(x) \mapsto (f(\alpha^{(1)}), \dots, f(\alpha^{(r+c)})).$$

G を整数の有限集合 Σ をアルファベットとするグラフとする. $w \in L(G)$ に対して

$$F(w, G) = \left\{ \sum_{i=-l}^\infty a_i x^i; (a_i)_{i \geq -l} \in X(G), a_{-l} \dots a_{-1} = w \right\}$$

と定める. また

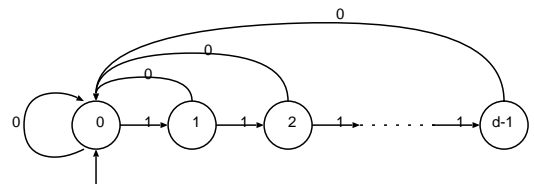


図 4 $x^d - x^{d-1} - \dots - x - 1$ の根となる Pisot 数の β -展開を受理するオートマトン
 Fig. 4 L_β for the root $\beta > 1$ of the polynomial $x^d - x^{d-1} - \dots - x - 1$.

$$F(\epsilon, G) = \left\{ \sum_{i=0}^\infty a_i x^i; (a_i)_{i \geq 0} \in X(G) \right\}$$

とおく. ただし ϵ は空語 (長さ 0 の語) を表す. G_β を L_β^R を受理するオートマトンとする. $w \in L_\beta^R$ に対してタイル $T(w)$ を

$$T(w) = \pi_\beta(F(w, G_\beta)).$$

によって定義する. $w \in L_\beta$ であれば $w00 \dots 0 \in L_\beta$ であるからすべての $v \in L_\beta^R$ に対して $T(00 \dots 0v) = T(v)$ である. $\mathcal{T}_\beta := \{T(w); w \in L(G_\beta)\}$ とする. この \mathcal{T}_β が実際に空間のタイル貼りになるのかといったことや, タイルの連結性等の位相的な性質はここでは議論しない. 以下では \mathcal{T}_β がタイル貼りを与える場合に $T \in \mathcal{T}_\beta$ の境界集合を構成する方法について述べる.

3. タイルの境界の構成

以降ではタイリング \mathcal{T}_β に対してタイル $T \in \mathcal{T}_\beta$ の境界は $\cup_{T' \in \mathcal{T}_\beta} (T \cap T')$ となることを仮定する.

次の補題が基礎的である.

補題 1. β を Pisot 単数とし, Σ を整数の有限集合とする. このとき,

$$\pi_\beta \left(\sum_{n=0}^\infty a_n x^n \right) = (0, 0, \dots, 0), \tag{1}$$

となる Σ の列 $(a_n)_{n \geq 0}$ 全体を受理するグラフ G が存在する. つまり, $(a_n)_{n \geq 0} \in X(G)$ と式 (1) が同

値となるグラフ G が存在する .

証明 グラフ G を以下のように構成する . $M = \max\{|m|; m \in \Sigma\}$ とする . $x^{(i)}$ で $x \in \mathbf{Z}[\beta]$ の β を $\alpha^{(i)}$ に写す共役写像による像とする . G に以下のように頂点集合 $\mathcal{V}(G)$ を与える .

$$\mathcal{V}(G) = \{f \in \mathbf{Z}[\beta] : \begin{aligned} &|f^{(i)}| \leq \frac{M}{1 - |\alpha^{(i)}|}, i \in \{1, 2, \dots, d-1\}, \\ &|f| \leq \frac{M}{|\beta| - 1} \}. \end{aligned}$$

代数的整数論でよく知られているようにこの集合は有限集合となる . $\delta : \mathbf{Z}[\beta] \times \Sigma \rightarrow \mathbf{Z}[\beta]$ を $\delta(f, d) = (f + d)\beta^{-1}$ によって定義する (β は単数なので $\beta^{-1} \in \mathbf{Z}[\beta]$). また $\delta^* : \mathbf{Z}[\beta] \times \Sigma^* \rightarrow \mathbf{Z}[\beta]$ を $\delta^*(f, d_1 d_2 \dots d_k) = \delta(\delta^*(f, d_1 d_2 \dots d_{k-1}), d_k)$ および $\delta^*(f, \epsilon) = f$ によって定義する . ただし , ϵ は空語である . よって

$$\delta^*(f, d_1 d_2 \dots d_k) = (f + d_1)\beta^{-k} + d_2\beta^{-k+1} + \dots + d_k\beta^{-1}.$$

$\delta(f, d) \in \mathcal{V}(G)$ のとき $f \in \mathcal{V}(G)$ から $\delta(f, d)$ への d でラベルされた辺を与え , 0 を G の初期状態とする . このようにして得られるグラフ G は補題の性質を持つ . 実際 , 式 (1) がある Σ の列 $(a_n)_{n \geq 0}$ に対して成り立てば任意の $N \geq 0$ と $i \in \{1, \dots, r+c\}$ に対して

$$(\alpha^{(i)})^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha^{(i)})^n = 0.$$

となる . よって

$$\begin{aligned} &|\delta^*(0, a_0 \dots a_{N-1})^{(i)}| \\ &= \left| (\alpha^{(i)})^{-N} \sum_{n=0}^{N-1} a_n (\alpha^{(i)})^n \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N} (\alpha^{(i)})^n \right| \\ &\leq \frac{M}{1 - |\alpha^{(i)}|}. \end{aligned}$$

また ,

$$\begin{aligned} &|\delta^*(0, a_0 \dots a_{N-1})| \\ &= |a_0\beta^{-N} + a_1\beta^{-N+1} + \dots + a_{N-1}\beta^{-1}| \\ &\leq \frac{M}{|\beta| - 1}. \end{aligned}$$

これはすべての $N > 0$ に対して $a_0 a_1 \dots a_N \in L(G)$ であることを意味する . 逆に $N \geq 0$ に対して $a_0 a_1 \dots a_N \in L(G)$ であると仮定すると

$$\delta^*(0, a_0 a_1 \dots a_N) = \beta^{-N-1} \sum_{n=0}^N a_n \beta^n \in \mathcal{V}(G).$$

となる . よって

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n (\alpha^{(i)})^n \right| \leq \frac{M}{1 - |\alpha^{(i)}|} |\alpha^{(i)}|^{N+1}.$$

上式の両辺は $N \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する . \square

上の証明中のグラフ G は初期状態から到達できない頂点も頂点集合として含む , これらは $X(G)$ に対して影響を持たない . 今後 , グラフは本質的な部分だけで構成されていると仮定する . つまり , $X(G)$ に無関係な辺と頂点は取り除かれ , グラフに含まれる頂点はすべて初期状態から出発するいずれかの無限長の道の上にあるものと仮定する . こうすることによってたとえば , 補題 1 のグラフ G を用いてある Σ の有限列 $a_0 a_1 \dots a_l$ が与えられたとき , それを適当に延長して無限列 $(a_i)_{i \geq 1}$ が $\pi_\beta((a_i)_{i \geq 1}) = 0$ となるようにできるかどうかを判定することができる . つまり $a_0 a_1 \dots a_l$ が G に受理されれば延長可能でそうでなければ延長不可能である .

例 3. $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$, $\Sigma = \{-1, 0, 1\}$ とする . この β , Σ に対して上の補題 1 におけるグラフ G は以下のように構成される . まず , 頂点集合 $\mathcal{V}(G)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(G) = &\left\{ m\beta + n \in \mathbf{Z}[\beta] : |m\beta + n| \leq \frac{1}{\beta - 1}, \right. \\ &\left. |m\alpha + n| \leq \frac{1}{1 - |\alpha|} \right\} \\ &= \{0, \pm 1, \pm(\beta - 1), \pm(\beta - 2), \pm\beta\} \end{aligned}$$

となる (図 5) . ここに $\alpha = (1 - \sqrt{5})/2$ である . 辺を上での証明中の手続きに従って与える . たとえば頂点 0 からは

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{0} \delta(0, 0) = (0 + 0)\beta^{-1} = 0. \\ 0 &\xrightarrow{1} \delta(0, 1) = (0 + 1)\beta^{-1} = \beta - 1. \\ 0 &\xrightarrow{-1} \delta(0, -1) = (0 - 1)\beta^{-1} = -\beta + 1. \end{aligned}$$

のように 3 本の辺が出る . $\beta - 1$ からは

$$\begin{aligned} \beta - 1 &\xrightarrow{0} \delta(\beta - 1, 0) \\ &= ((\beta - 1) + 0)\beta^{-1} = -\beta + 2 \\ \beta - 1 &\xrightarrow{1} \delta(\beta - 1, 1) \\ &= ((\beta - 1) + 1)\beta^{-1} = 1 \\ \beta - 1 &\xrightarrow{-1} \delta(\beta - 1, -1) \\ &= ((\beta - 1) - 1)\beta^{-1} \\ &= -2\beta + 3 \notin \mathcal{V}(G) \end{aligned}$$

となり -1 でラベルされた辺は出ないので 2 本の辺が

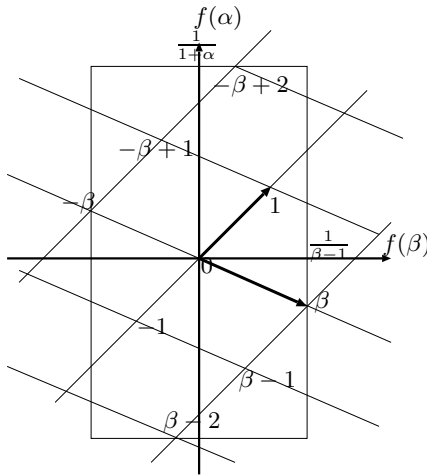


図 5 $\{(f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}), f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}))\}; f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$
 Fig. 5 $\{(f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}), f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}))\}; f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$.

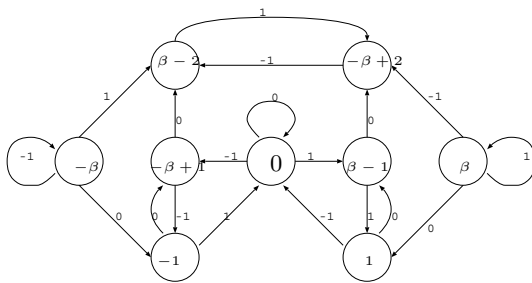


図 6 0 に収束する $(1 - \sqrt{5})/2$ を基とする巾級数の係数列
 Fig. 6 Sequences of coefficients of the powerseries of base $(1 - \sqrt{5})/2$ which converge to 0.

出る．グラフ G は図 6 に示されるものとなる．ここで頂点 β と $-\beta$ は初期状態 0 から到達できないので 0 を表す巾級数の係数列に関与することはなく，グラフから取り除いてもよい．こうして得られたグラフ G 上の 0 から出発する無限長の道は α を基とする係数が 0 または ± 1 の巾級数で 0 に収束するものの係数列すべてを与える．たとえば，

$$1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^7 + \dots = 0,$$

$$1 - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4 + \alpha^5 - \alpha^6 + \dots = 0,$$

等が分かる．

定理 1. G_β を L_β^R を受理するオートマトンとする． k を非負整数とする． $\Sigma_\beta^k = \{(a_1, \dots, a_k); a_i \in \Sigma_\beta\}$ をアルファベットとするグラフ G_β^k で次の性質を持つものがある：

$(a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{k,n})_{n \geq -l} \in X(G_\beta^k)$ の必要十分条件は

$$\pi_\beta \left(\sum_{n=-l}^{\infty} a_{1,n} x^n \right) = \dots = \pi_\beta \left(\sum_{n=-l}^{\infty} a_{k,n} x^n \right), \quad (2)$$

かつ

$$(a_{i,n})_{n \geq -l} \in X(G_\beta) \quad i = 1, \dots, k, \quad (3)$$

である．

証明 G_β^k は以下のように構成される． G を補題 1 において $\Sigma = \pm\Sigma_\beta = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm[\beta]\}$ とおいたグラフとし， $\mathcal{V}(G_\beta^k) = \mathcal{V}(G_\beta)^k \times \mathcal{V}(G)^{k-1}$ と G_β^k の頂点集合を定める．

G_β^k に辺を次のように与える． $v = (v_1, v_2, \dots, v_k, f_2, \dots, f_k)$ と $v' = (v'_1, \dots, v'_k, f'_2, \dots, f'_k)$ を G_β^k の 2 頂点とする． $j = 1, \dots, k$ について G_β 中に v_j から v'_j に d_j でラベルされた辺があり， $j = 2, \dots, k$ について G 中に f_j から f'_j へ $d_1 - d_j$ でラベルされた辺があるとき， v と v' を (d_1, d_2, \dots, d_k) でラベルされた辺で結ぶ．そして $i_{G_\beta^k} = (i_{G_\beta}, \dots, i_{G_\beta}, 0, \dots, 0)$ とすると G_β^k は定理の条件を満たす．

実際， $(a_{1,n}, \dots, a_{k,n})_{n \geq -l} \in X(G_\beta^k)$ とすると明らかに $j = 1, 2, \dots, k$ について $(a_{j,n})_{n \geq -l} \in X(G_\beta)$ と $j = 2, \dots, k$ について $(a_{1,n} - a_{j,n})_{n \geq -l} \in X(G)$ がいえる．補題 1 から

$$\sum_{n=-l}^{\infty} (a_{1,n} - a_{j,n}) (\alpha^{(i)})^n = 0 \quad i = 1, \dots, r + c.$$

よって

$$\sum_{n=-l}^{\infty} a_{1,n} (\alpha^{(i)})^n = \sum_{n=-l}^{\infty} a_{j,n} (\alpha^{(i)})^n.$$

逆に式 (2) と (3) を列 $(a_{1,n}, \dots, a_{k,n})_{n \geq -l}$ について仮定する．最初の $m + l + 1$ 個の並び $(a_{1,n}, \dots, a_{k,n})_{m \geq n \geq -l}$ を G_β^k へ与えたときに頂点 $(v_1, \dots, v_k, f_2, \dots, f_k)$ に推移したとする．すると式 (3) が成り立つので， $j = 1, \dots, k$ について G_β 中に頂点 v_j から頂点 v'_j へ $a_{j,m+1}$ でラベルされた辺がある．また式 (2) と補題 1 より， $j = 2, \dots, k$ について $(a_{1,n} - a_{j,n})_{n \geq -l} \in X(G)$ がいえる．よって $a_{1,m+1} - a_{j,m+1}$ でラベルされた f_j からある頂点 $f'_j \in \mathcal{V}(G)$ へ向かう辺がある．つまり $(v_1, \dots, v_k, f_2, \dots, f_k)$ から $(v'_1, \dots, v'_k, f'_2, \dots, f'_k)$ へ向かう $(a_{1,m+1}, \dots, a_{k,m+1})$ でラベルされた辺が G_β^k に存在する．□

上の定理中の G_β^k を用いて k 個の語 $w_1 = (a_{1,n})_{-l \leq n \leq -1}, \dots, w_k = (a_{k,n})_{-l \leq n \leq -1} \in L_\beta^R$ が

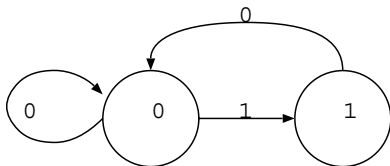


図 7 $G_\beta: \beta^2 - \beta - 1 = 0$
 Fig. 7 $G_\beta: \beta^2 - \beta - 1 = 0$.

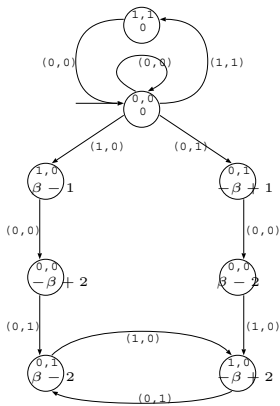


図 8 $G_\beta^2: \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 Fig. 8 $G_\beta^2: \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

与えられたとき, $T(w_1) \cap T(w_2) \cap \dots \cap T(w_k)$ 上のすべての点を生成することができる.

例 4. β と α を例 1 と同じものと仮定する. すると $carry(\beta) = (10)^\infty$ となり, G_β は図 7 のようになる. よって例 3 より $\mathcal{V}(G_\beta^2)$ は

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 0), (0, 0, \pm 1), (0, 0, \pm(\beta-1)), (0, 0, \pm(\beta-2)) \\ (0, 1, 0), (0, 1, \pm 1), (0, 1, \pm(\beta-1)), (0, 1, \pm(\beta-2)) \\ (1, 0, 0), (1, 0, \pm 1), (1, 0, \pm(\beta-1)), (1, 0, \pm(\beta-2)) \\ (1, 1, 0), (1, 1, \pm 1), (1, 1, \pm(\beta-1)), (1, 1, \pm(\beta-2)) \end{array} \right\}$$

となる. 定理 1 の証明にあるように辺を与える. たとえば $(0, 0, 0)$ からの辺を考えると次のようになる. G_β において $0 \xrightarrow{0} 0, 0 \xrightarrow{1} 1$, 例 3 の G において $0 \xrightarrow{0} 0, 0 \xrightarrow{1} \beta - 1, 0 \xrightarrow{-1} -\beta + 1$ であることから,

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &\xrightarrow{(0,0)} (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) &\xrightarrow{(0,1)} (0, 1, -\beta + 1) \\ (0, 0, 0) &\xrightarrow{(1,0)} (1, 0, \beta - 1) \\ (0, 0, 0) &\xrightarrow{(1,1)} (1, 1, 0) \end{aligned}$$

と 4 本の辺が出ることが分かる. このようにして各頂点を結び, 原点から出発する無限長の道の上にある辺と頂点だけを残すと G_β^2 は図 8 のようになる.

このグラフからこの T_β に含まれる 2 つの異なるタイルの共通部分は多くても 1 点だけからなることが分

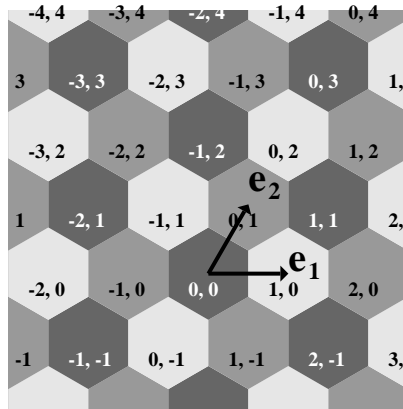


図 9 六角形タイル貼りの 3-彩色
 Fig. 9 A 3-coloring of the hexagonal tiling.

かる. たとえば, $T(\epsilon) = T(0) \cap T(1) = \{-1\}$ であることが以下のようにして分かる. 初期状態から出発して $(0, 1)$ でラベルされた辺にそって進む. すると頂点 $(0, 1, -\beta + 1)$ に到達する. そこからはただ 1 つの道があり, それは $(0, 0)(1, 0)((0, 1)(1, 0))^\infty$ でラベルされている. 実際,

$$\alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \dots = \frac{1}{\alpha} + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \dots = -1.$$

同じように $T(\epsilon) \cap T(10) = \{-1/\alpha\}, T(\epsilon) \cap T(100) = \emptyset$ といったことが分かる.

4. タイルの彩色

タイルの彩色方法を与える. 以下に多角形による周期的なタイル貼りの例をとりあげ, 基本的なアイデアを説明する.

図 9 は正六角形による平面のタイル貼りである. 図 9 のように 2 つの基底ベクトル e_1, e_2 を使って座標をとりなおし, 各タイルの中心に \mathbb{Z}^2 の点を対応させることができる. 2 つのタイルの中心の座標の差が $D = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, -1)\}$ のいずれかであるときにタイルは隣接する. よって, タイルの中心の座標が (x, y) のときタイルを色 $c(x, y) := (x - y) \bmod 3$ で塗ると隣り合うタイルは異なる色となる. 実際, $(x, y) - (x', y') \in D$ とすると

$$c(x, y) - c(x', y') = \{(x - x') - (y - y')\} \bmod 3 \neq 0 \bmod 3.$$

Pisot タイル貼りは非周期的であるためこのような座標を導入することはできないが, 以下に示すようにタイル全体の整数格子への埋め込みで隣接するタイルどうしが遠く離れないようなものが存在する. つまり, 上例での D が有限集合になるように整数格子に埋め

込める .

系 1. タイル貼り T_β が与えられたとき , 共通部分を持つタイルどうしが異なる色で塗られるようにタイル貼りを有限色で塗り分けるアルゴリズムがある .

証明 $z = b_0 + b_1\beta^1 + \dots + b_{d-1}\beta^{d-1} \in \mathbf{Z}[\beta]$ のとき $\xi(z) = (b_0, b_1, \dots, b_{d-1}) \in \mathbf{Z}^d$ と表し , アドレス写像 $\phi : T_\beta \rightarrow \mathbf{Z}^d$ を $w = a_{-l}a_{-l+1} \dots a_{-1} \in L_\beta^R$ に対し $\phi(T(w)) = \xi(a_{-l}\beta^{-l} + a_{-l+1}\beta^{-l+1} + \dots + a_{-1}\beta^{-1})$. と定める . これは明らかに単射である .

2 つのタイル $T(a_{-l}a_{-l+1} \dots a_{-1})$, $T(b_{-l}b_{-l+1} \dots b_{-1})$ が共通部分を持つのは G_β^2 上の初期状態から出発する道で $(a_n, b_n)_{-l \leq n \leq -1}$ によってラベルされているものが存在するときに限る . このような道が存在するとき $(a_n, b_n)_{-l \leq n \leq -1}$ でラベルされた初期状態から出発する道をたどって到達した状態の第 3 列は 2 つの列 $(a_n)_{-l \leq n \leq -1}$, $(b_n)_{-l \leq n \leq -1}$ の差 ,

$$(a_{-l}\beta^{-l} + \dots + a_{-1}\beta^{-1}) - (b_{-l}\beta^{-l} + \dots + b_{-1}\beta^{-1})$$

と等しくなる . たとえば , 例 4 で $T(10100)$ と $T(10001)$ は共通部分を持つ . $(1, 1)(0, 0)$, $(1, 0)(0, 0)$, $(0, 1)$ でラベルされた道をたどると状態 $(0, 1, \beta - 2)$ に到達する . これは

$$(\beta^{-5} + \beta^{-3}) - (\beta^{-5} + \beta^{-1}) = \beta - 2.$$

を意味する . D_β で各頂点の 3 列目の要素全体の集合を表すことにする . もちろんこれは有限集合となる .

N を彩色に用いる色の数とし , 彩色関数 $c : T_\beta \rightarrow \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ を探索する . $(0, 0, \dots, 0)$ を除くすべての $(d_0, d_1, \dots, d_{d-1}) \in \xi(D_\beta)$ に対して $c_0d_0 + \dots + c_{d-1}d_{d-1} \neq 0 \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ となる $(c_0, \dots, c_{d-1}) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^d$ を探し出す . もし , このような (c_0, \dots, c_{d-1}) を見つけることができなければ見つかるまで N を増やす . D_β が有限集合であるからこのような N は必ず見つかる .

$$c : T_\beta \ni T \mapsto (c_0, \dots, c_{d-1})^t \phi(T) \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}.$$

と定めると , c は共通部分を持つタイルに異なった色を割り当てる . 実際 , $T(w)$ と $T(w')$ が隣接すれば ,

$$\phi(T(w)) - \phi(T(w')) \in \xi(D_\beta).$$

$$c(\phi(T(w))) - c(\phi(T(w')))$$

$$= c(\phi(T(w)) - \phi(T(w'))) \neq 0 \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \quad \square$$

例 5. $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$ とする . 例 4 より $D_\beta = \{0, \pm(\beta - 1), \pm(\beta - 2)\}$. よって $\xi(D_\beta) = \{(0, 0), \pm(1, -1), \pm(-2, 1)\}$. $(c_0, c_1) = (0, 1)$ ととれば , T_β は 2-彩色可能であることが分かる .

5. 計算例

5.1 アドレス写像のとり方と必要な色数

計算を簡単にするために ξ を 1 つ次元の低い格子 \mathbf{Z}^{d-1} への写像に次のようにとり直す . β は単数であるから $\mathbf{Z}[\beta] = \mathbf{Z}[\beta^{-1}]$ となる . よってすべての $x \in \mathbf{Z}[\beta]$ は整数の d 個の組 , $n_0, n_1, \dots, n_{d-1} \in \mathbf{Z}$ によって $x = n_0 + n_1\beta^{-1} + \dots + n_{d-1}\beta^{-d+1}$ の形に一意に表される . このとき , $\xi(x) = (n_1, \dots, n_{d-1}) \in \mathbf{Z}^{d-1}$ と定義する . ξ は全射準同型で核は \mathbf{Z} となる . よって $\mathbf{Z}[\beta]/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}^{d-1}$. すべてのタイルは $a = a_{-1}\beta^{-1} + a_{-2}\beta^{-2} + \dots + a_{-l}\beta^{-l}$ が β -展開となるような語 $w = a_{-l} \dots a_{-1}$ によって表されるので $a \in \mathbf{Z}[\beta] \cap [0, 1)$ である . この ξ を用いても同様に彩色関数を構成できる .

この ξ を用いるのは続く計算例にみるように D_β をより原点に近い格子点に埋め込むようにみえるからである . $\xi(D_\beta)$ の大きさが分かると必要とされる色の数がある程度分かる . たとえば $(x, y) \in \xi(D_\beta)$ に対して $|x|, |y| \leq 1$ が成り立てば , T_β は 4-彩色可能であることが分かる .

すべての平面グラフは 4-彩色可能であるが , すべての Pisot タイル貼りの双対グラフが平面グラフになるかは分からないため 4-彩色可能性ははっきりしない . 実際 , 平面グラフにならない Pisot タイル貼りが存在することが予想されている .

以下ではこの ξ を用いて $w = a_{-l}a_{-l+1} \dots a_{-1} \in L_\beta^R$ に対して $\xi(a_{-l}\beta^{-l} + \dots + a_{-1}\beta^{-1}) = (n_1, n_2, \dots, n_{d-1})$ であるとき , $T(w)$ を $T_{n_1, n_2, \dots, n_{d-1}}$ と表すことにする .

以下では 2 次元のタイル貼りの彩色を考察する . 2 つの異なるタイルの共通部分が無限集合となるとき , 2 つのタイルが隣接するというようにする . また写像 $c : T_\beta \rightarrow \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ がすべての 2 つの異なるタイル T , T' の組に対して $c(T) \neq c(T')$ となるとき N -彩色関数と呼ぶ . 系 1 の証明中の写像 c は明らかに彩色関数であるといえる .

5.2 3-彩色可能な平面タイル貼りの例

β を $x^3 - x^2 - x - 1$ を最小多項式とする Pisot 数とする . β は 2 つの虚なガロア共役 , $\alpha = -0.41964337760708 \dots + 0.6062907292071993 \dots i$ と $\bar{\alpha}$ を持つ . $carry(\beta) = 0.(110)^\infty$. 図 1 はタイル , $T(0) = T(\epsilon)$, $T(1)$, $T(10)$, $T(11)$, $T(100)$, $T(101)$, $T(110)$ を描いたものである . 図 10 は G_β^2 を描いたもので , 図中の $[m, n, 1]$ は $m\beta^2 + n\beta + 1$ を略記したものである . このグラフから

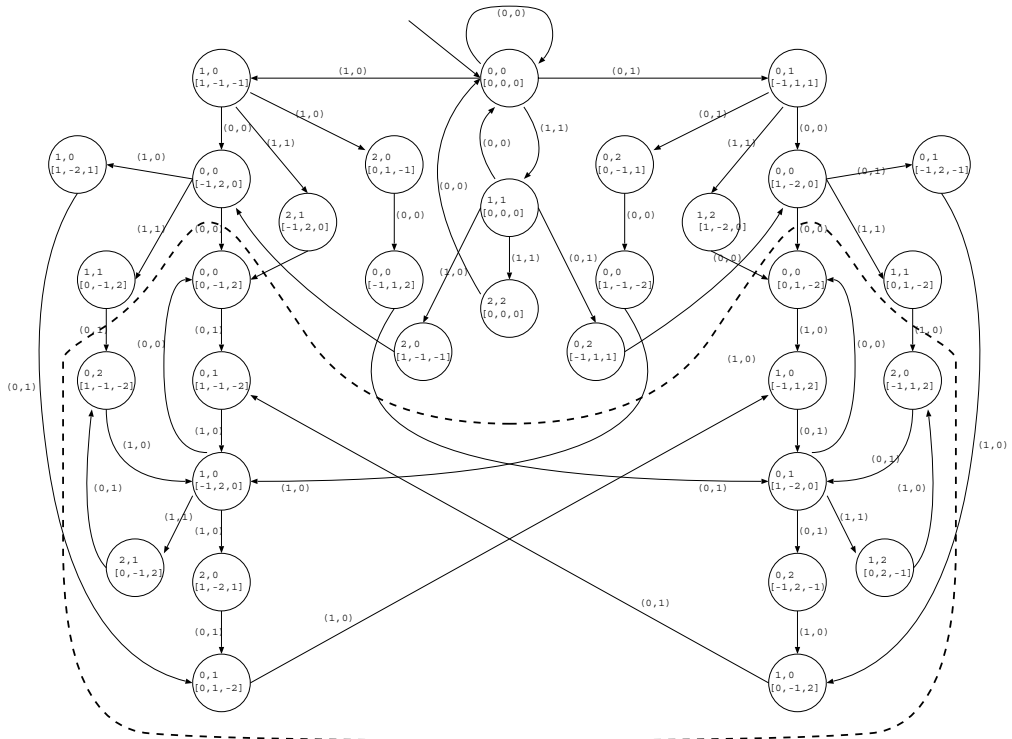


図 10 $G_\beta^2: \beta^3 - \beta^2 - \beta - 1 = 0$
 Fig. 10 $G_\beta^2: \beta^3 - \beta^2 - \beta - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}
 D_\beta &= \{0, \pm(\beta^2 - \beta - 1), \pm(\beta^2 - \beta - 2), \\
 &\quad \pm(\beta^2 - 2\beta), \pm(\beta^2 - 2\beta - 1), \\
 &\quad \pm(\beta - 1), \pm(\beta - 2)\} \\
 &= \{0, \pm\beta^{-1}, \pm(-1 + \beta^{-1}), \pm\beta^{-2}, \\
 &\quad \pm(1 + \beta^{-2}), \pm(\beta^{-1} + \beta^{-2}), \\
 &\quad \pm(-1 + \beta^{-1} + \beta^{-2})\}.
 \end{aligned}$$

が分かる. β^{-1} と β^{-2} の係数をとって,

$$\xi(D_\beta) = \{(0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), \pm(1, 1)\}.$$

このタイル貼りりが 3-彩色可能であることが分かる. 彩色関数 c は

$$c: T_\beta \ni T_{n,m} \mapsto (n + m) \bmod 3 \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z},$$

ととれる (図 11).

このグラフはループを含む強連結成分を 2 つ含む. 1 つは初期状態を含む自明なものである. もう 1 つは図 10 で破線で囲まれている成分である (図 12). この非自明な強連結成分が 2 つの異なるタイルの共通部分を生成する. この図から 2 つの交わるタイルは無限にたくさんの点で交わることが分かる.

彩色の問題とは別の話題になるが G_β^3 は 171 個の頂点を持つ. これから $T(0)$ の「3 重点」を計算することができる:

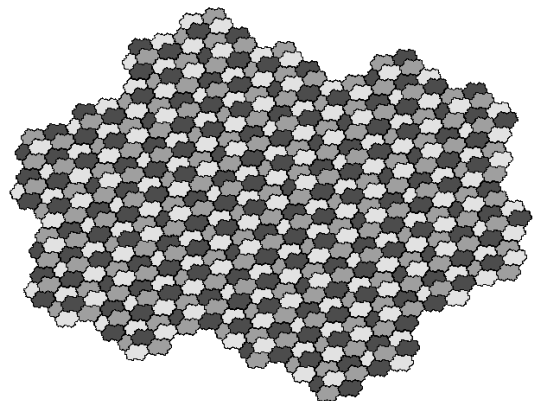


図 11 3-彩色: $\beta^3 - \beta^2 - \beta - 1 = 0$
 Fig. 11 3-colorings: $\beta^3 - \beta^2 - \beta - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}
 T(0) \cap T(1) \cap T(11) &= \{-1\}. \\
 T(0) \cap T(11) \cap T(10) &= \{-\frac{1}{\alpha+1}\}. \\
 T(0) \cap T(10) \cap T(110) &= \{-\frac{1}{\alpha}\}. \\
 T(0) \cap T(110) \cap T(100) &= \{-\frac{1}{1-\alpha^3}\}. \\
 T(0) \cap T(100) \cap T(101) &= \{-\frac{1}{\alpha} + 1\}. \\
 T(0) \cap T(101) \cap T(1) &= \{\frac{1}{\alpha+1}\}.
 \end{aligned}$$

たとえば

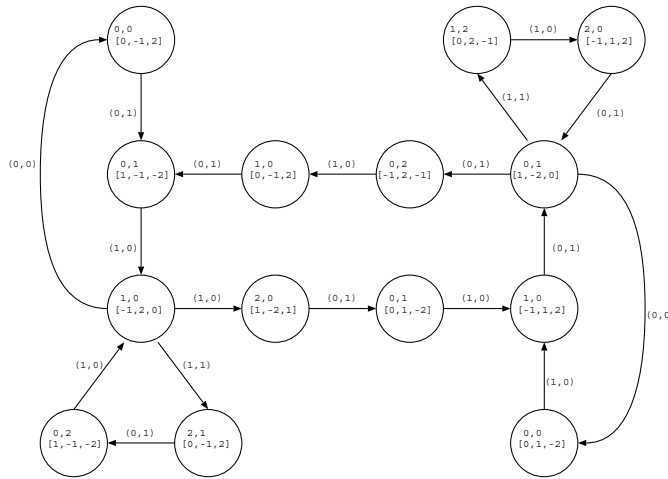


図 12 非自明な強連結成分
Fig. 12 non-trivial strongly connected component.

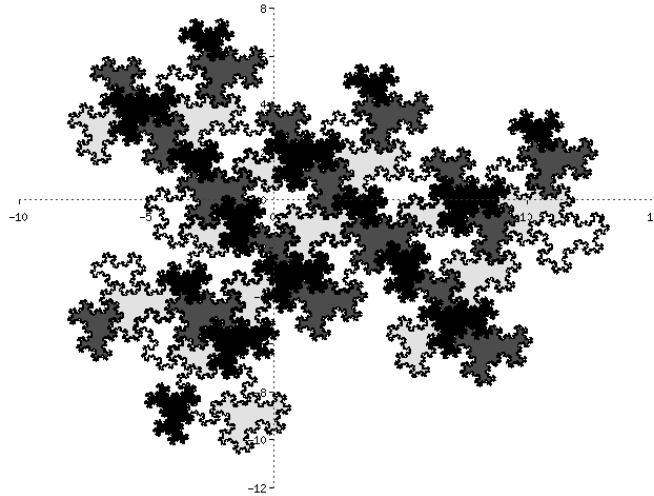


図 13 $T_\beta: \beta^3 - \beta^2 - 1 = 0$
Fig. 13 $T_\beta: \beta^3 - \beta^2 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{3n}(\alpha + \alpha^2) &= \alpha^{-1} + \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{3n}(1 + \alpha) \\ &= \alpha^{-2} + \alpha^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{3n}(\alpha^2 + \alpha^3) \\ &= -1. \end{aligned}$$

である。最初の -1 の表示 $T(0)$ による表示で、2 番目のものは $T(1)$ による表示となる。最後のものは $T(11)$ による。

5.3 3-彩色不可能な平面タイル貼りの例

β を $x^3 - x^2 - 1$ の実根とする。すると $\beta = 1.4655712318767680266 \dots$ は 2 つの虚な \mathbb{Q} 上の共役 $\alpha = -0.23278561593838401 \dots - 0.79255199251544$

$78483 \dots i$ と $\bar{\alpha}$ を持つ。 $carry(\beta) = 0.(100)^\infty$ となる。この場合 T_β は 3-彩色不可能である。 $T(\epsilon)$ をちょうど 7 枚のタイルによって囲まれる。よって 4 色以上が必要となる。上述のアルゴリズムによって得られた G_β^2 は 31 個の頂点を持ち、

$$\begin{aligned} D_\beta &= \{0, \pm(\beta^2 - \beta), \pm(\beta - 1), \pm(\beta^2 - \beta - 1), \\ &\quad \pm(\beta^2 - 2), \pm(\beta^2 - 2\beta), \pm(\beta - 2)\} \\ &= \{0, \pm(\beta^{-1}), \pm(\beta^{-2}), \pm(-1 + \beta^{-1}), \\ &\quad \pm(-1 - \beta^{-1} + \beta^{-2}), \\ &\quad \pm(-1 + \beta^{-1} + \beta^{-2}), \pm(-1 + \beta^{-2})\} \end{aligned}$$

である。よって

$$\xi(D_\beta) = \{(0, 0), \pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1), \pm(1, -1)\}.$$

となり、4-彩色関数 c を

$$c : T_\beta \ni T_{m,n} \mapsto (m + 2n) \bmod 4 \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}.$$

のようにとれる (図 13)

5.4 3-彩色可能なもう 1 つの例 (点で接するケース)

β を $x^3 - x - 1$ の実根とする . $\beta = 1.324717957244746 \dots$ は \mathbf{Q} 上の 2 つの共役 $\alpha = -0.662358978622373 \dots - 0.562279512062301 \dots i$ と $\bar{\alpha}$ を持つ . $\text{carry}(\beta) = (10000)^\infty$ となり , 図 14 は L_β^R を受理するグラフである . G_β^2 を図 15 に示す . 図 15 中の 0 , a , b と c は入力 (0,0) , (0,1) , (1,0) , (1,1) をそれぞれ表す . $l_1 l_2 \dots l_n$ によってラベルされた辺は道 ,

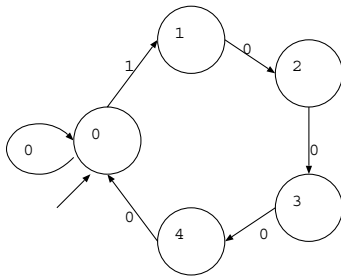


図 14 $G_\beta : \beta^3 - \beta - 1 = 0$
Fig. 14 $G_\beta : \beta^3 - \beta - 1 = 0.$

$$\bigcirc \xrightarrow{l_1} \bigcirc \xrightarrow{l_2} \bigcirc \rightarrow \dots \rightarrow \bigcirc \xrightarrow{l_n} \bigcirc.$$

を略記したものである . この T_β は Akiyama ら²⁾ によって調べられ , 境界のハウスドルフ次元が決定されている . そこでは $T(1000000) \cap (\alpha^4 T(0) \cup \alpha^4 T(1) \cup \alpha^3 T(1) \cup \alpha T(1)) = \emptyset$. という事実を用いており , この関係を encircling method と呼ぶ方法で導いている . これらの関係は G_β^2 を使って導くことが可能である . たとえば $T(1000000) \cap \alpha T(1) = \emptyset$ は初期状態 i から出発する $a000000b$ とラベルされた道が G_β^2 にないことから分かる .

G_β^2 は 77 個の頂点を持つ . このタイル貼りでは 1 点のみで交わるタイルが存在する . たとえば

$T(\epsilon) (= T(0000000)) \cap T(1000000) = \{-\alpha^{-3}\}$ であることが以下のようにして分かる . G_β^2 の初期状態 i から出発して最初の 7 個の入力列 (1,0) , (0,0) , (0,0) , (0,0) , (0,0) , (0,0) , (0,0) を読み $a000000$ でラベルされた道を進む . すると , 頂点 s にたどりつき , そこから先は 1 本道になる . その (無限) 道は $0b(a000b)^\infty$ とラベルされている . これから $\alpha^{-7} + \alpha^2 + \alpha^7 + \alpha^{12} + \dots = \alpha + \alpha^6 + \alpha^{11} + \dots = -\alpha^{-3}$. を得る .

図 15 で破線で囲まれているのは G_β^2 のループを

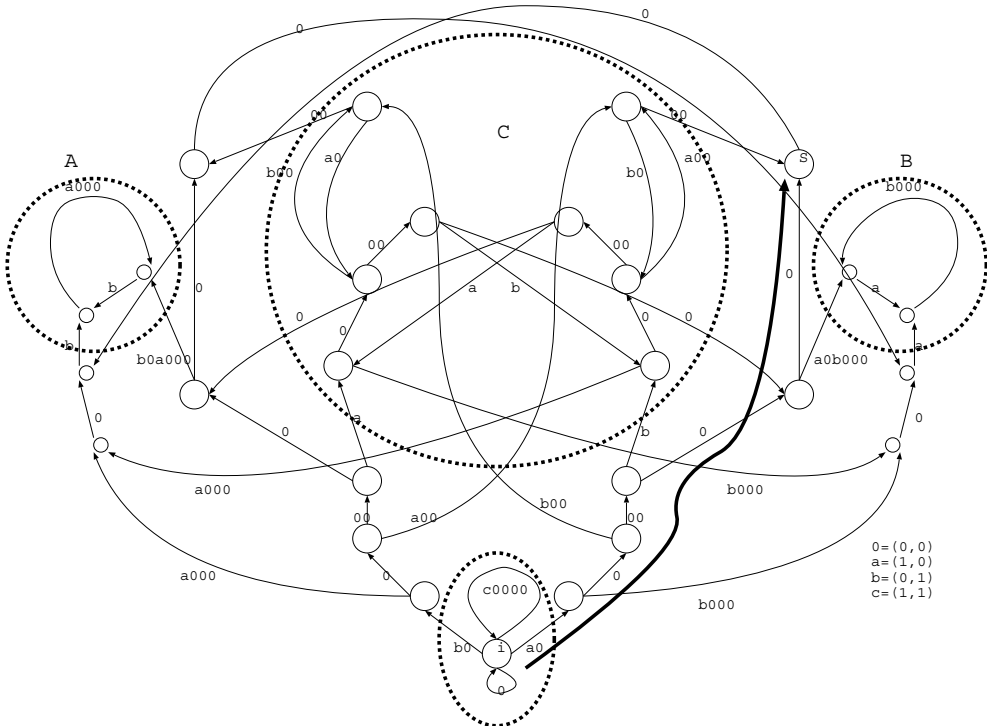


図 15 $G_\beta^2 : \beta^3 - \beta - 1$
Fig. 15 $G_\beta^2 : \beta^3 - \beta - 1.$

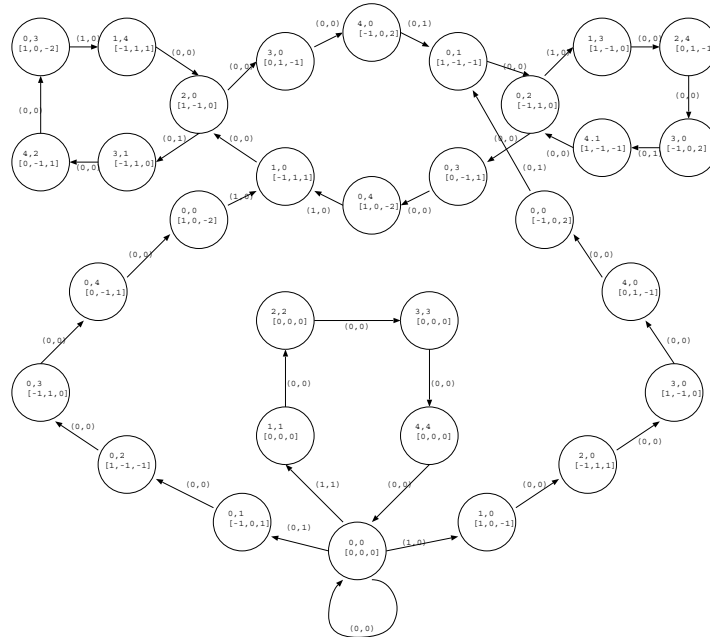


図 16 タイルの隣接性を判定するオートマトン

Fig. 16 The automaton which determines the adjacency of tiles.

含む強連結成分である．全部で 4 つある．強連結成分 A, B は 1 つのループのみで構成されている．つまり， A, B 中の頂点を始点とする無限長の道は 1 つだけである．この成分のいずれかの頂点に到達するとこの成分以外の頂点に到達することはない．よって 2 つのタイル $T(a_{-l}a_{-l+1}\cdots a_{-1}), T(b_{-l}b_{-l+1}\cdots b_{-1})$ が隣接する，つまり無限に多くの点で交わるのは初期状態から出発する $(a_n, b_n)_{-l \leq n \leq -1}$ でラベルされた道で C 中に延長することのできるものがある場合である．よって隣接関係を決定するためには G_β^2 から C へ到達できない頂点を除く必要がある．これらの頂点を除去したグラフを図 16 に示す．このグラフから

$$D_\beta = \{\pm(\beta^2 - 1), \pm(\beta^2 - \beta - 1), \pm(\beta^2 - \beta), \pm(\beta - 1), \pm(\beta^2 - 2)\}$$

$$= \{\pm\beta^{-1}, \pm\beta^{-2}, \pm(-1 + \beta^{-2}), \pm(-1 + \beta^{-1} + \beta^{-2}), \pm(-1 + \beta^{-1})\}.$$

$$\phi(D_\beta) = \{(0, 0), \pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\}.$$

となり，3-彩色関数

$$c(T_{m,n}) = (m + n) \bmod 3.$$

を得る．

参考文献

1) Akiyama, S.: Self affine tiling and Pisot numeration system, Györy, K.(Ed.), *Number Theory and its Applications*, pp.7–17, Kluwer, Ky-

oto (1999).
 2) Akiyama, S. and Sadahiro, T.: A self-similar tiling generated by the minimal Pisot number, *Acta Mathematica et informatica Universitatis Ostraviensis*, Vol.6, pp.9–26 (1998).
 3) Falconer, K.: *Techniques in Fractal Geometry*, Cambridge University Press (1998).
 4) Garey, M. and Johnson, D.: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman, New York (1979).
 5) Gjini, N.: A self-similar tiling generated by the Pisot number which is the root of the equation $x^3 - x^2 - 1 = 0$, Ph.D. Thesis, Osaka City University (1999).
 6) Gröchnig, K. and Madych, W.: Multiresolution Analysis, Haar Bases, and Self-Similar Tilings of \mathbf{R}^n , *IEEE Trans. Information Theory*, Vol.38, pp.556–568 (1992).
 7) Hopcroft, J. and Ullman, J.: *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley (1979).
 8) Kenyon, R.: Self-similar tilings, Ph.D. Thesis, Princeton University (1990).
 9) Kenyon, R. and Vershik, A.: Arithmetic construction of sofic partition of hyperbolic toral automorphisms, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol.18, pp.357–372 (1998).
 10) Lagarias, J.: Geometric Models for quasicrys-

- tals I, *Discrete and Computational Geometry*, Vol.21, pp.161–191 (1999).
- 11) Resnikoff, H.L. and Wells, R.: *Wavelet analysis*, Springer (1998).
- 12) Senechal, M.: *Quasicrystal and Geometry*, Cambridge U.P. (1995).
- 13) Thurston, W.: *Groups, Tilings and Finite state automata*, AMS Colloquium lectures (1989).
- 14) Vince, A.: *Self-Replicating tiles and their boundary*, *Discrete and Computational Geometry*, Vol.21, pp.463–476 (1999).
- 15) Wagon, S. and Sibley, T.: *Rhombic Penrose Tilings Can Be 3-Colored*, *American Mathematical Monthly*, Vol.107, pp.251–253 (2000).
- 16) Wang, Y. and Strichartz, R.: *Geometry of Self-Affine Tiles I*, *Indiana Univ. Math. J.*, Vol.48, pp.1–23 (1999).

(平成 12 年 5 月 8 日受付)

(平成 13 年 3 月 9 日採録)



貞広 泰造 (正会員)

平成 5 年東京工業大学理学部情報科学科卒業。平成 7 年同大学大学院理工学研究科情報科学専攻修了。同年宇部工業高等専門学校助手。現在、熊本県立大学総合管理学部助手。理学博士。日本数学会会員。



櫻井 幸一 (正会員)

昭和 61 年九州大学理学部数学科卒業。昭和 63 年同大学大学院工学研究科応用物理専攻修了。同年三菱電機(株)入社。現在、九州大学大学院システム情報科学研究院助教授。1997 年 9 月より 1 年間米国コロンビア大学計算機科学科客員として在籍。暗号理論、情報セキュリティ、社会情報工学の研究に従事。平成 11 年度坂井記念特別賞(情報処理学会)受賞。『暗号理論の基礎』(1996 年共立出版, 監訳)、『数論アルゴリズムと楕円暗号理論入門』(1997 年シュプリンガー東京, 訳), 工学博士。電子情報通信学会, 日本数学会各会員。