5J−3

ジュリア集合に関する一考察

石田則道
法政大学計算センター

1．はじめに

フラクタル構造を特徴づけるものに自己相似性がある。それはある部分を拡大すると元と同じような図形になっている。その一つの例をジュリア集合に見ることができる。ジュリア集合の存在は早くから数学者によって述べられていたものの、当時は表現方法に乏しく、そこに内在するフラクタル図形を視覚的にとらえることができるようになったのはコンピュータのおかげである。

マンデルブロー集合と同様、ジュリア集合もまた簡単な二次方程式の繰り返し計算の結果として得られ、多彩な図形が描ける。本文ではジュリア集合をいくつかの方法で求め、その可視化から自己相似性を考える。

2．ジュリア集合

ジュリア集合の計算は $f(Z_n) = Z^2{}_n + C$ の二次関数を考える。ここで、$Z_n = x+iy$(複素変数)，$C = p+iq$ (複素定数) としたとき、$Z_{n+1} = f(Z_n)$ の漸化式を用いて Z_0 から始め、次々と代入を繰り返して $x^2{}_n + y^2{}_n > 4$ の関係を満足するまでの繰り返し回数を求める。この回数は初期値 Z_0 と複素定数Cによって決まる。そこで、いくつかの複素定数Cの値について複素変数 Z_n を複素平面にとったとき、その平面での分水嶺の形を調べる。分水嶺で囲まれた領域のことをジュリア集合と呼び、その正確な定義は無限大へ発散しないような初期値の集合のことである。

もう一つの例として、f を Zの多項式とした複素変数代数方程式 $f(Z) = 0$ を考え、それをニュートン法により近似解法を行う。

$Z_{n+1} = Z_n - f(Z_n) / f'(Z_n)$ の漸化式から逐次 Z_{n+1} を求め、ある値に収束すればそれを根とする。$f(Z) = Z^2 - 1$ の場合、初期値 Z_0 における関数の接線から Z_1, Z_2, Z_3・・・を求めていき、収束条件に達したら反復を終了する。この方法で複素平面上の全ての点に対して収束するまで計算しその繰り返し回数を用いて色付けする。この場合、二つの根の回りに円形ができいつまでも色の塗れない部分がジュリア集合である。

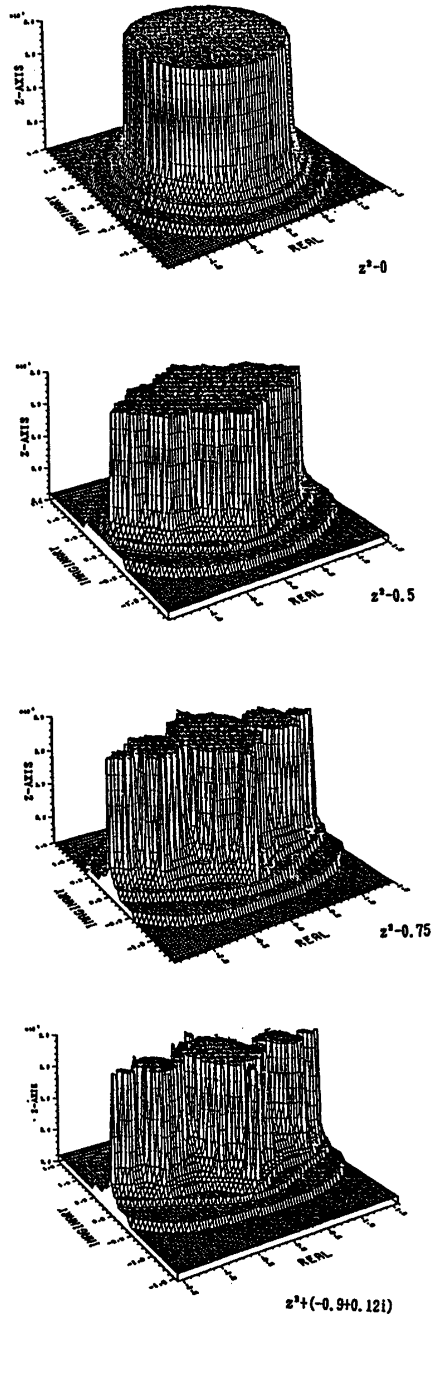


図1　Mesa of Julia sets

3．計算結果と表示

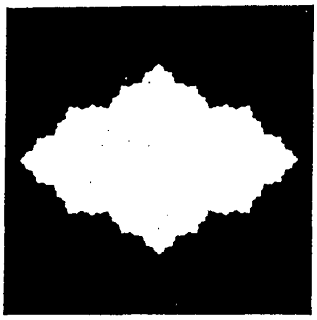
上述のアルゴリズムを用いて、ジュリア集合を三次元表現である鳥瞰図と

A study of Jujia sets
Norimichi Ishida
Hosei University, Computer Center

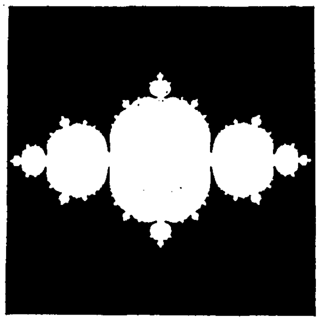
色彩図で求めた。簡単な複素方程式の漸化式から求まるジュリア集合はBASIC による処理でも概略図は作成できるがドット数の大きい図を描く場合は計算に時間がかかりすぎる。鳥瞰図(図1 、図2)はホスト機(M380)のFortranで計算し、表示の部分はアプリケーション・パッケージ (GRAPHMAN) を用いて求めた。メサ (台地) と名づけたこれらの図は魅力的な構図である。

二次関数の計算で、C =0の場合は単位円周上を境界としたゼロ点と無限遠点の収引領域がよく分かり，Cにわずかでも値を持たせると輪郭は驚くべき形に変わっていく。その図形をよく眺めると至る所で同じような構図が見ることができ、フラクタル図形になっている。一方、ニュートン法で求めた複素代数方程式はメサで見ると根を極とした階段上の円形になり、その存在を目で確認することができる。

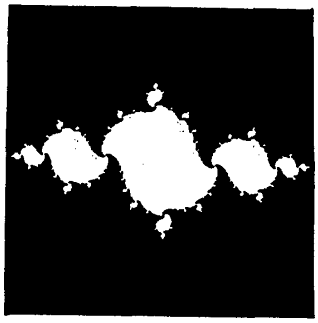
色彩図(図2 、図4)はEWS(NWS821) を用い基本となるアルゴリズムはFortran をベースにし、C言語によるCGI ライブラリーを用いて表示を行った。



$z^2-0.5$ $(-1.5<\mathrm{Re}<1.5, -1.5<\mathrm{Im}<1.5)$



$z^2-0.75$ $(-1.5<\mathrm{Re}<1.5, -1.5<\mathrm{Im}<1.5)$



$z^2+(-0.9+0.12i)$ $(-1.6<\mathrm{Re}<1.6, -1.6<\mathrm{Im}<1.6)$

図2 Julia sets
iteration 300
dots 800 x 800

4. まとめ

簡単な非線形二次式にも関わらず、パラメータの値を少し変えるだけで力学系の様子が急激に変わる。さらに複素変数の高次代数方程式をニュートン法で近似解法したときの色彩図は見事な構図である。それらをよく見ると全体の構図の一部が縮小された形で至る所で見ることができる。このジュリア集合に見る自己相似性はフラクタル次元と共にフラクタル概念の重要な性質である。フラクタルは宇宙空間から岩石まであらゆるレベルを対象にした新らしい自然観である。今後とも自己相似性を基本とした部分と全体の関係でとらえることのできる構造、現象をコンピュータを通して調べて行きたい。

参考文献

1) B.B.Mandelbrot:The Fractal Geometory of Nature
2) 宇敷重広: フラクタルの世界、日本評論社 1987.12
3) 山口昌哉: カオスとフラクタル、講談社 1986.6
4) Micheal Dorfler: Dynamical system and fractal
5) Micheal Barnsley: Fractal everywhere、Academic press 1988
6) 石田則道: マンデルブロー集合と可視化、
情報処理学会第40回(平成2 年前期) 全国大会

図4 Julia sets by Newton's method
real $-1.5 \sim 1.5$
imaginary $-1.5 \sim 1.5$
iteration 30
dots 800 x 800

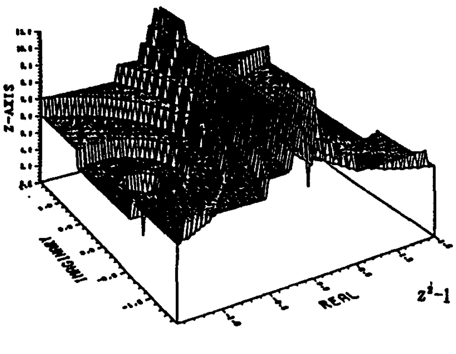
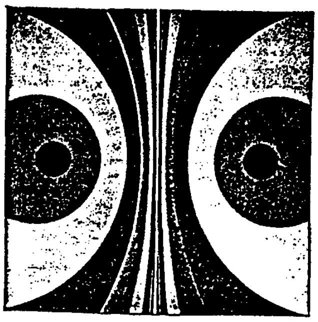
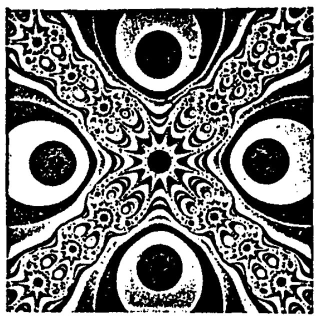


図3 Mesa of Julia sets by Newton's method



z^2-1



z^4-1