# 多面体入力に基づく三辺形パッチ曲面モデル

5J－2

栗山　繁

日本アイ・ビー・エム株式会社　東京基礎研究所

## 1.はじめに

コンピュータによる幾何設計において，現在多く用いられるスプライン関数などを用いたテンソル積曲面モデルは，制御点を2次元格子状に配置するという制約があり，閉曲面を構成するときに制御点の集中する部分が生じたり，別々な制御点群で定義された曲面間を自由に融合させることが困難であるなどの問題点が指摘される．これらは，複雑な位相をもつ曲面の入力を困難なものにしている．我々はこれらの問題点を解決し，意匠設計における自由曲面の形状入力をより簡略に行うため，曲面の大雑把な形状を多面体によって入力し，その頂点のデータを基に三辺形パッチによる曲面を生成する手法を開発した．まず，多面体の各n辺形領域 $(n>3)$ に対して新たな1点（以後，領域分割点）を想定し，n辺形の各辺と結んでn個の三角形に分割する．つぎに，これらの三角形の辺に沿った空間曲線網を定義する，各頂点における接線ベクトルと領域分割点の座標を，ノルム最小化関数を用いて計算する．最後に，4次の Bézier 三辺形パッチを拡張したモデルを導入し，これらの空間曲線網を補間して曲面を生成する．また，ノルム最小化関数に多面体の頂点，及び辺における張力変数を導入し，その値を制御することによって，曲面設計者がより柔軟かつ直観的に形状を調節できるようにした．

## 2.ノルム最小化関数による曲線網の生成

曲面を構成する三辺形パッチ間の境界における曲線を決定する，空間曲線網の生成法を以下に述べる．まず最初に，多面体の三辺形領域を除く各多辺形領域（ただし，多辺形領域を定義する各頂点は同一平面上にある必要はない)に対して新たに領域分割点を想定し，それと領域を囲む各辺とを結んで三角形分割された接続網を考える（図1参照）．つぎに，各頂点に対してその点を共有するn本の辺に周回順を与え，それらに沿った接線ベクトル $F_t$ を，二つの平行でない接平面ベクトル $T^s$, $T^c$ を想定することにより，三角関数を用いて以下のように表す．

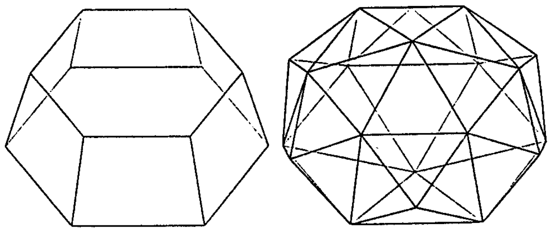
$$F_t(T^s, T^c, \theta_i) = T^s \sin(\theta_i) + T^c \cos(\theta_i), \quad \theta_i = 2\pi(i-1)/n, \ (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

ただし，その頂点が開曲面の開いた境界上にある場合は，(1)の $i = 1, n$ に対する接線ベクトルが，その境界となる辺に沿ったものとして，$\theta_i = \pi(i-1)/(n-1)$とおく．

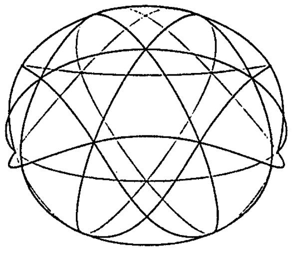
媒介変数 $s$, $(0 \le s \le 1)$ をもつ3次の自然スプライン曲線 $C(s)$ は，各区間における曲線の疑似ノルムの総和を最小化する性質をもつが[1]，ここで2種類の張力変数を含む拡張された疑似ノルム[2]を利用して曲線網[3]を生成することにし，その最小化関数 $\sigma(s)$を新たに以下のように定義する．

$$\sigma(s) = \sum_{e_i \in E} \beta_i^e \int_0^1 \ddot{C}_i(s)^2 ds + \sum_{v_j \in V} \beta_j^v \sum_{e_k \in E_{v_j}} \dot{C}_{j,k}^{\,2}, \quad \ddot{C}_i = \frac{\partial^2 C_i(s)}{\partial s^2}, \ \dot{C}_{j,k} = \frac{\partial C_k(s_j)}{\partial s}, \ C_k(s_j) = v_j. \tag{2}$$

ただし，$E$, $V$をそれぞれ多面体の辺，頂点の集合，$E_{vj}$ を頂点 $v_j$ を含む辺の集合とする．また，$\beta_i^e$, $\beta_j^v$ を，多面体の各辺 $e_i \in E$ 及び各頂点 $v_j \in V$に対する張力変数を表すものとする．最後に，接平面ベクトル $T^s$, $T^c$と領域分割点の座標値を未知変数としてもち，多面体の頂点と，(1)で与えられる接線ベクトルより生成される3次曲線 $C(s)$ を (2)に代入し，それらの未知変数に関する偏微分値をゼロとおくことによる変分法によって変数の値を計算し，3次曲線網を決定する．この変分法によって生成される線形行列のサイズは点の総数を $v$ 個，そのうちの領域分割点の個数を $c$ 個とすると，$(2v+c)^2$となるが，一般的にゼロ要素の多い疎な行列となるので，繰返し法を用いることにより効率的にその解を計算することができる[3]．



(a) 多面体　(b) 三角分割



(c) 曲線網

図1　多面体からの曲線網生成例

## 3.三辺形パッチによる曲面モデル

一般的に，曲面を構成する三辺形パッチが，隣接する境界において滑らかに接続されるためには，その境界上の全ての点で曲面の接平面が一致するという，1次の幾何学的連続性 (Geometric Continuity $G^1$級)の条件を満たすことが必要である．このような条件を満たす三辺形パッチモデルは，三角領域に対する重心座標系を表す変数 u,v,w ,$0 \le u, v, w \le 1$, $u + v + w = 1$を用いた，4次3変数の Bézier 多項式 $B_I^4(u, v, w)$の線形和の形式を基に，それを有理多項式に拡張して，

---

**Triangular Patch Surface Model by means of Polyhedral Input**
Shigeru Kuriyama
IBM Research, Tokyo Research Laboratory

$$Q(u,v,w) = \sum_{i,j,k\geq 0}^{i+j+k=4} D_{i,j,k}\, B^4_{i,j,k}(u,v,w)\,,$$

$$D_{2,1,1} = \frac{v\,D^w_{2,1,1} + w\,D^v_{2,1,1}}{v + w}\,,\quad D_{1,2,1} = \frac{u\,D^w_{1,2,1} + w\,D^u_{1,2,1}}{u + w}\,,\qquad (3)$$

$$D_{1,1,2} = \frac{u\,D^v_{1,1,2} + v\,D^u_{1,1,2}}{u + v}\,,\quad B^4_{i,j,k}(u,v,w) = \frac{n!}{i!\,j!\,k!}u^i v^j w^k\,,$$

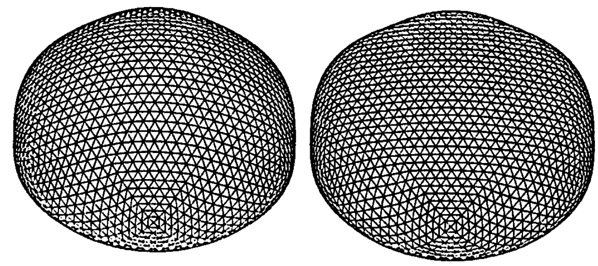
の様に表される[4]. ただし，変数 $D^s_{i,j,k}$は，それぞれ s = 0, (s = u,v,w) の境界に関する連続性にのみ影響する．ここではまず，(3)で表される三辺形パッチの境界における曲線が，2 節において計算される3 次の空間曲線と一致するように変数 $D_{i,j,k}$ の境界における値を決定し，つぎに隣接するパッチを全ての境界について $G^1$ 級で接続するように，境界上にない変数 $D^s_{i,j,k}$, (i,j,k) = {(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)}, s = u,v,wの値を，4 次の Bézier 三辺形パッチの接続条件式を補正した形式で計算する．
以上に述べた手法により生成される曲面は，入力された多面体の形状の対称性を保ち，空間曲線網の形状が歪んでいなければ，三辺形パッチ内部の形状に生じる余分な振動も抑えることができる．

## *4.*曲面の生成例

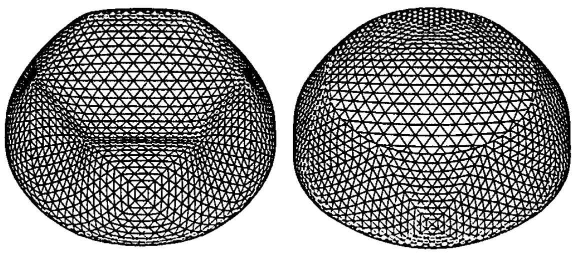
3 節で述べた手法により，曲面を生成した例を図2 に示す．図2 (a) は，図1 で与えられた曲線網から生成された曲面を表す．2 節で述べた張力を制御する変数 $\beta^e$, $\beta^v$ の値を変えることによって曲線網を変形させ，曲面の対話的な形状調節をおこなうことができる．図2 (b) に，図1 の多面体の上部の六辺形に含まれる全ての辺に対する張力値の値を $\beta^e = 10.$ に変えた曲面，また図2 (c) に，同じ六辺形に含まれる全ての頂点に対する張力値の値を $\beta^v = 10.$ に変えた曲面を表す．
$\beta^e$ の値を増やすことによって，上部の六辺形領域に含まれる三辺形パッチの形状がより平坦になる．一方，$\beta^v$ の値を増やすことによっても，同じ領域の形状がより平坦になるが，$\beta^e$ のときと違って六辺形領域の各頂点において尖った部分形状をなす．図2 (d) は，(a) と同じ張力値をもち，上部の六辺形領域に曲面が存在しない場合の開曲面の例を示す．本研究で述べた曲面生成法は，任意の多面体に対して $G^1$ 級曲面を生成することができるが，多面体の種類によっては直感的な形状を得られない場合がある．その一例として，凹形の多辺形領域を含む多面体を入力した場合，領域分割点が凹形領域外部に計算されてしまうことがあり直観とは異なる形状を生成してしまうが，凹形の領域を複数の凸形部分に細分割して入力すれば，直観にあった形状を生成することができる．

## *5.*おわりに

多面体から三辺形パッチによって自由曲面を生成する手法について述べた．これにより設計者は，形状のおおまかな構造を多面体により記述し，多面体の頂点，辺における張力変数の値によって曲面形状を微妙に調節することができる．多面体の構造は任意に設定できることから，テンソル曲面による形状設計をおこなうときに問題となった，直交する曲面間の融合にも対処することができる．また曲面形状の調節は，最小化関数による曲線網の式を用いずに，領域分割点の座標値，接平面ベクトルの値を直接に操作することによってもおこなうことができ，このときには曲面の更新は，値を変更した点を含む三角領域と，それらの三角領域と点を共有する周囲の三角領域にわたってのみ行えばよく，多面体の全体の複雑度と関係なく局所的な計算でおこなえる．ゆえに，本手法は対話的な曲面設計環境を実現するのに適している．現在使われている自由曲面設計システムの多くが，テンソル積曲面を用いているが，本手法で用いた曲面モデルは各境界の連続性にそれぞれ独立して影響する変数を含み，双3 次曲面とも簡単な制約式によって $G^1$ 級で接続することができる[5]ので，既存のシステムへの組み込みも容易となる．今後の課題として，曲面の曲率までが連続な（$G^2$級）三辺形パッチの生成法の検討が挙げられる．



(a) $\beta^e = 1$, $\beta^v = 0.$　　(b) $\beta^e = 10.$



(c) $\beta^v = 10.$　　(d) 開曲面

図2　張力制御による曲面生成例

## 文献


1. Boor, C. D. and Lynch, R. E.: *On Splines and Their Minimum Properties. J. Math. Mech.* Vol 15 (1966) pp 953-969.

2. Foley, T A: *Interpolation with Interval and Point Tension Controls Using Cubic Weighted v-Splines. ACM Trans. Math. Soft.* Vol. 13, No. 1, pp. 68-96 (1987).

3. Nielson, G. M.: *A Method for Interpolating Scattered Data Based upon a Minimum Norm Network. Math. of Comp.* No 40 (1983) pp 253-271.

4. Hosaka, M. and Kimura, F.: *Non-four-sided Patch Expressions with Control Points. Computer Aided Geometric Design* Vol. 1, pp. 75-86 (1984).

5. Liu, D. and Hoschek, J.: *$GC^1$ continuity conditions between adjacent rectangular and triangular Bézier surface patches. Comput.-Aided Des.* Vol 21 No 4 (1989) pp 194-200.