2J−6

実射影平面の CGによる可視化に関する一考察

鶴野幸子、長江貞彦

近畿大学

1，はじめに

コンピュータ・グラフィクス（CG）の重要な特徴の一つとして、理論上の物体の可視化、が挙げられる。そこで、位相空間における多様体に目を向け、本稿では、向きづけ不能曲面で３次元空間には存在不可能な実射影平面の可視化を試みる。

2，メービウスバンド[1]と実射影平面[1]

向きづけ不可能な曲面でよく知られるものにメービウスバンドがある。

C：$\{(x, y, z) \in R^3;\ x^2+y^2=1,\ |z| \leq 1\}$

M：$\{p, -p\}$ の形のＣの点の順序づけられていない対の集合

とおくと、

$M = \{\{-p, p\}; p \in C\}$

で、Ｍに商位相をあたえることができ、こうしてあたえられた位相空間をメービウスバンドという。

また、球面S^2の２点 x, -xの順序づけられていない対{x, -x}の全体のなす集合$\mathbf{RP}^2=\{\{x,-x\};\in S^2\}$は、全射$\pi : S^2 \to \mathbf{RP}^2$が$x \mapsto \{x,-x\}$で与えられている。この写像$\pi$に関する商位相をもつ$\mathbf{RP}^2$を実射影平面という。

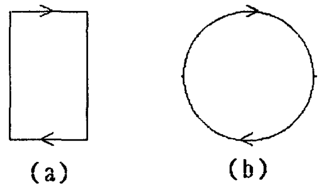


Fig.1 ﾒｰﾋﾞｳｽﾊﾞﾝﾄﾞと実射影平面

すなわち、Fig.1 に示す(a)(b)をそれぞれ矢印の向きにしたがって、面が交差しないように結合させたものがメービウスバンドと実射影平面である。ただし、実射影平面は４次元で可能となる。

3，実射影平面の形状作成

実射影平面の形状を考えるとき、まず３次元空間内で面が交差する擬似射影平面作成する。そして、交差部分を４次元方向（U 軸方向）に移動させて、面が交差しないようにする。具体的にはFig.2 に示すように(a)に示す実射影平面を(b)に示すように分割して考え、AとA',BとB',CとC'....を(c)に示すように結合してゆくことにより、矢印の向きに従った結合を行う。このとき、結合点Pを(d)に示すように１点に集中させる。次に、点Pを(e)に示すようにZU平面でAとA',BとB'...の結合点のそれぞれが交わらないように円状に配置する。これにより、４次元空間において実射影平面が構成される。

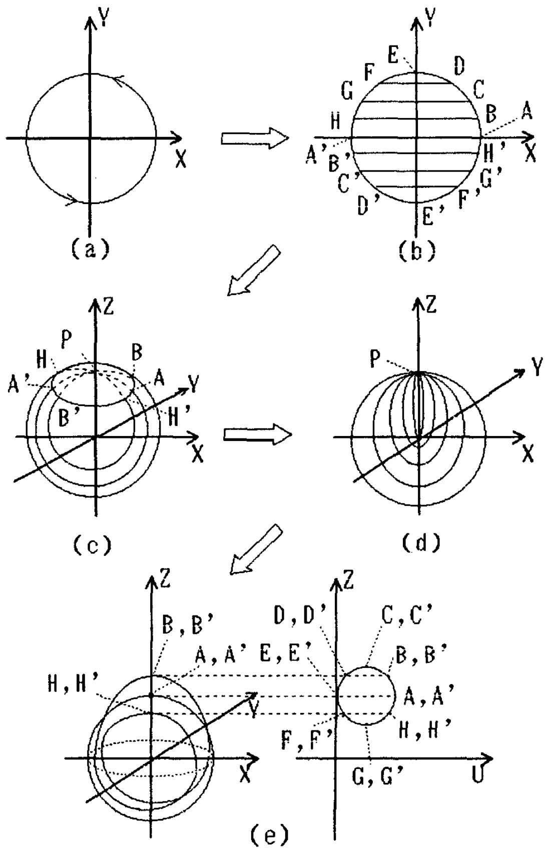


Fig.2 実射影平面の形状構成

4，アフィン変換

実射影平面が４次元であるため、４次元空間におけるアフィン変換が必要である。

x, y, z, u　：直交する４軸

A Consideration of a Real Projective Plane in relation to a Visualization by C.G.

Sachiko TSURUNO, Sadahiko NAGAE, KINKI UNIVERSITY

dx, dy, dz, du：x, y, z, u軸方向の平行移動量

sx, sy, sz, su：x, y, z, u軸方向の拡大縮小量

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$：XY, YZ, ZX, XU, YU, ZU平面における回転角

$Tr_1, Tt_2, Tr_3, Tr_4, Tr_5, Tr_6$：XY, YZ, ZX, XU, YU, ZU平面における回転移動の変換行列

Td　　：平行移動の変換行列

Ts　　：拡大縮小の変換行列

Tr　　：回転移動の変換行列

とおくと、$Tr_1, Tt_2, Tr_3, Tr_4, Tr_5, Tr_6$は式(1)に、Td、Ts、Trはそれぞれ式(2)、(3)、(4)のようになる。

$$Tr_1=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad Tr_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$Tr_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0\\ 0 & 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad Tr_4=\begin{bmatrix}\cos\theta_4 & 0 & 0 & -\sin\theta_4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta_4 & 0 & 0 & \cos\theta_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$Tr_5=\begin{bmatrix}\cos\theta_5 & 0 & -\sin\theta_5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \sin\theta_5 & 0 & \cos\theta_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad Tr_6=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_6 & 0 & -\sin\theta_6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \sin\theta_6 & 0 & \cos\theta_6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{-------------(1)}$$

$$Td=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ dx & dy & dz & du & 1\end{bmatrix} \text{-----(2)}\quad Ts=\begin{bmatrix}sx & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & sy & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & sz & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & su & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{-----(3)}$$

$Tr=Tr_1\cdot Tr_2\cdot Tr_3\cdot Tr_4\cdot Tr_5\cdot Tr_6$-----(4)

したがって、アフィン変換のための変換行列をTとおくと式(5)が得られる。

$T=Td\cdot Tr\cdot Ts$------------------(5)

5，表示

表示は4次元の形状を3次元空間に投影して行う。形状はサーフェスでモデルリングしており、両面をフォンシェーディングする。

作図結果として、Fig.3に実射影平面の全体像を示す。xy, yz, zx, xu, yu, zu 平面において、それぞれ0, 25, 25, 25, 0, 0度回転した状態で、(a)には不透明、(b)光の透過率70%の場合である。

次に、実射影平面の性質を表したなかのごく一例を示す。実射影平面はFig.4 に示すようにメービウスバンドと開円板に分けられる。Fig.5にはFig.3に示した実射影平面の一部であるメービウスバンドを(a)に、その残りの部分を(b)-1に示している。さらに、(b)-1ではこの図形が開円板と同相であるかが分かりにくいので、位相を変えないように(b)-1 を順に変化させたものが(b)-2, 3である。(b)-3では明らかに開円板と同相であることがわかる。

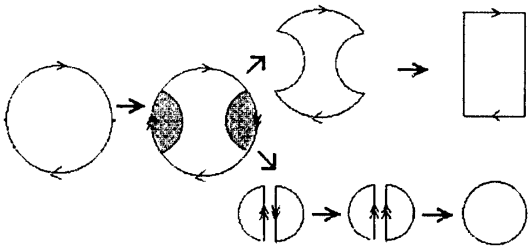
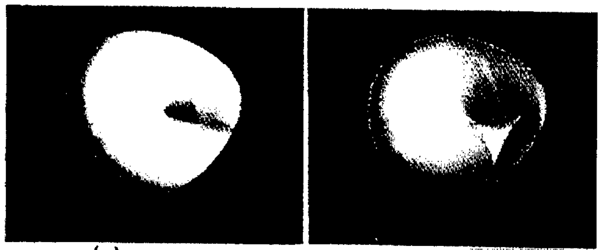


Fig.4 メービウスバンドと円板

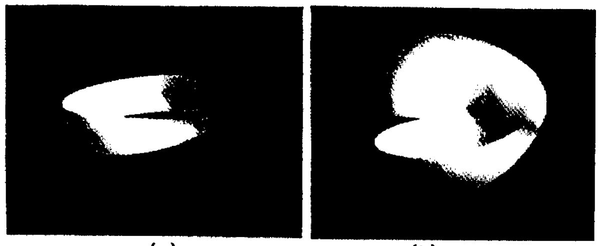
5，おわりに

今回は1つの試みとして、実射影平面を表示した。3次元に投影する方法をとると、表示データは多様体の性質を失う、ということなどいくつかの問題は残されている。しかし、実射影平面の特性を可視化することは可能で、それにより非常に直観的認識を得やすいことは明かとなった。したがって、表示法の工夫などで、より有効な利用が可能と考える。

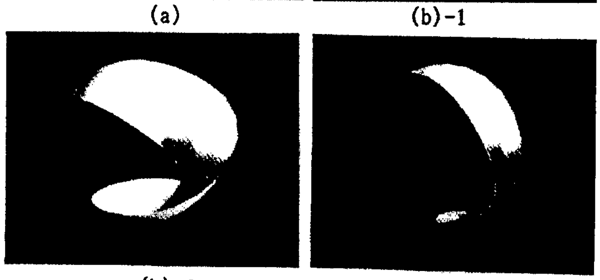


(a)　　　　(b)

Fig.3 実射影平面の全体像



(a)　　　　(b)-1



(b)-2　　　　(b)-3

Fig.5 実射影平面の部分表示

参考文献

1）加藤十吉 編訳、ｸｾﾞｺｽﾆｵﾌｽｷ著：ﾄﾎﾟﾛｼﾞｰ入門
東京大学出版会、1983　　　　他