正弦・余弦三角補間の誤差解析

3C−10

秦野和郎（愛知工業大学・電子工学科）

１・はじめに、

被近似関数が奇関数のときに正弦三角補間式はきわめて良い近似を与え、偶関数のとき、余弦三角補間式はきわめて良い近似を与える。しかし、この条件が満たされないときにどのような結果になるかについては従来、議論の対象になっていなかったと思われる。本稿では、上の場合にどのような結果になるかを、誤差解析を通じて検討する。

２・離散正弦・余弦Fourier係数の誤差、

閉区間$[0,\pi]$上の等間隔離散点、

$$\bar{x}_r=\frac{\pi r}{N}\quad : 0\leqq r\leqq N \tag{1}$$

において、関数値、$f(\bar{x}_r)$が与えられたとき、離散正弦Fourier係数$\bar{u}_j(f)$、離散余弦Fourier係数$\bar{v}_j(f)$は、それぞれ

$$\bar{u}_j(f)=\frac{2}{N}\sum_{r=0}^{N}{}' f(\bar{x}_r)\cdot\cos j\bar{x}_r\quad : 0\leqq j\leqq N \tag{2}$$

$$\bar{v}_j(f)=\frac{2}{N}\sum_{r=0}^{N} f(\bar{x}_r)\cdot\sin j\bar{x}_r\quad : 1\leqq j\leqq N-1 \tag{3}$$

で与えられる。

さて、$f(x)$は、

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{\infty} a_j(f)\cos jx \tag{4}$$

$$a_j(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos jx\cdot dx \tag{5}$$

とFourier余弦展開される。又、

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} b_j(f)\sin jx \tag{6}$$

$$b_j(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin jx\cdot dx \tag{7}$$

とFourier正弦展開される。

式(4)を式(2)に代入し、cosxの周期性、対称性を使うと、離散Fourier係数とFourier係数との間の関係式、

$$\bar{u}_j(f)=a_j(f)+\sum_{k=1}^{\infty}\{a_{2kN+j}(f)+a_{2kN-j}(f)\} \tag{8}$$

を得ることができる。同じようにして、

$$\bar{v}_j(f)=b_j(f)+\sum_{k=1}^{\infty}\{b_{2kN+j}(f)-b_{2kN-j}(f)\} \tag{9}$$

を得ることができる。

次に、式(5)に部分積分を反復適用すると

$$a_j(f)=\sum_{i=1}^{m}\frac{2(-1)^{i-1}}{\pi j^{2i}}\{(-1)^j f^{(2i-1)}(\pi)-f^{(2i-1)}(0)\}$$

$$+\frac{2(-1)^{m-1}}{\pi j^{2m+1}}\int_0^{\pi} f^{(2m+1)}(t)\sin jt\cdot dt \tag{10}$$

となる。同じようにして、式(7)から、

$$b_j(f)=\sum_{i=0}^{m}\frac{2(-1)^{i-1}}{\pi j^{2i+1}}\{(-1)^j f^{(2i)}(\pi)-f^{(2i)}(0)\}$$

$$-\frac{2(-1)^{m-1}}{\pi j^{2m+1}}\int_0^{\pi} f^{(2m+1)}(t)\cos jt\cdot dt \tag{11}$$

を得ることができる。

式(10)を、式(8)の右辺第二項に適用し、

$$\bar{\delta}_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\{\frac{1}{(k+x)^i}+\frac{(-1)^i}{(k-x)^i}\} \tag{12}$$

とおくと、離散Fourier係数の誤差を与える式、

$$\bar{u}_j(f)-a_j(f)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{2(-1)^{i-1}}{\pi(2N)^{2i}}\{(-1)^j f^{(2i-1)}(\pi)-f^{(2i-1)}(0)\}\cdot\bar{\delta}_{2i}(\frac{j}{2N})$$

$$+\frac{2(-1)^{m-1}}{\pi(2N)^{2m+1}}\int_0^{\pi} f^{(2m+1)}(t)\cdot\bar{\alpha}_{2m+1}(2Nt;\frac{j}{2N})dt \tag{13}$$

$$\bar{\alpha}_{2m+1}(t;x)=\sum_{k=1}^{\infty}\{\frac{\sin(k+x)t}{(k+x)^{2m+1}}+\frac{\sin(k-x)t}{(k-x)^{2m+1}}\} \tag{14}$$

を得ることができる。又、式(11)を式(9)の右辺第二項に適用すると、

$$\bar{v}_j(f)-b_j(f)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\frac{2(-1)^{i-1}}{\pi(2N)^{2i+1}}\{(-1)^j f^{(2i)}(\pi)-f^{(2i)}(0)\}$$

Error Analysis of sine and cosine trigonometric Interpolations

Kazuo HATANO　　AICHI Institute of Technology

$$\cdot \bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{j}{2N}\right)$$

$$-\frac{2(-1)^{m-1}}{\pi(2N)^{2m+1}}\int_0^{\pi} f^{(2m+1)}(t)\cdot \bar{\beta}_{2m+1}\left(2Nt;\frac{j}{2N}\right)dt \tag{15}$$

$$\bar{\beta}_{2m+1}(t;x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos(k+x)t}{(k+x)^{2m+1}}-\frac{\cos(k-x)t}{(k-x)^{2m+1}}\right\} \tag{16}$$

を得ることができる。式(13),(15)は離散Fourier係数の誤差を正確に与える式である。これらの式から、離散Fourier係数の誤差の性質がわかる。

3・正弦・余弦三角補間式の誤差、

式(4)を有限項で打ち切って得られる、打ち切り余弦Fourier級数、

$$C_N(f;x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{N-1}a_j(f)\cos jx \tag{17}$$

の誤差、

$$f(x)-C_N(f;x)=\sum_{j=N}^{\infty}a_j(f)\cos jx \tag{18}$$

に式(10)を代入すると、

$$f(x)-C_N(f;x)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\{f^{(2i-1)}(\pi)\tilde{q}_{2i}(\pi-x;N)-f^{(2i-1)}(0)\tilde{q}_{2i}(x;N)\}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f^{(2m+1)}(t)\{\tilde{q}_{2m+1}(t+x;N)+\tilde{q}_{2m+1}(t-x;N)\}dt \tag{19}$$

を得ることができる.ここで、

$$\tilde{q}_{2i}(x;N)=\sum_{j=N}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i}}\cos jx \tag{20}$$

である。

さて、余弦三角補間式、

$$\bar{C}_N(f:x)=\frac{1}{2}\bar{u}_0(f)+\sum_{j=1}^{N-1}\bar{u}_j(f)\cos jx+\frac{1}{2}\bar{u}_N(f)\cos Nx \tag{21}$$

に式(13)を代入し、更に、$\bar{u}_N(f)$については、式(10)を代入し、

$$\tilde{Q}_{2i}(x;N)=\frac{(-1)^{i-1}}{(2N)^{2i}}\left[\frac{1}{2}\bar{\delta}_{2i}(0)+\sum_{j=1}^{N-1}\bar{\delta}_{2i}\left(\frac{j}{2N}\right)\cos jx+\frac{1}{2}\left\{2^{2i}+\bar{\delta}_{2i}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\cos Nx\right] \tag{22}$$

$$\tilde{G}_{2m+1}(x,t;N)=\frac{2(-1)^{m-1}}{(2N)^{2m+1}}\left[\frac{1}{2}\bar{\alpha}_{2m+1}(2Nt;0)+\sum_{j=1}^{N-1}\bar{\alpha}_{2m+1}\left(2Nt;\frac{j}{2N}\right)\cos jx+\frac{1}{2}\left\{2^{2m+1}\sin Nt+\bar{\alpha}_{2m+1}\left(2Nt;\frac{1}{2}\right)\right\}\cos Nx\right] \tag{23}$$

とおくと、

$$\bar{C}_N(f;x)=C_N(f;x)+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\{f^{(2i-1)}(\pi)\tilde{Q}_{2i}(\pi-x;N)-f^{(2i-1)}(0)\tilde{Q}_{2i}(x;N)\}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f^{(2m+1)}(t)\tilde{G}_{2m+1}(x,t;N)dt \tag{24}$$

となる。余弦三角補間式の誤差は、

$$f(x)-\bar{C}_N(f;x)=\{f(x)-C_N(f;x)\}+\{C_N(f;x)-\bar{C}_N(f;x)\} \tag{25}$$

である。式(19),(24)を参考にして、

$$\bar{Q}_{2i}(x;N)=\tilde{q}_{2i}(x;N)-\tilde{Q}_{2i}(x,t;N) \tag{26}$$

$$\bar{G}_{2m+1}(x,t;N)=\tilde{q}_{2m+1}(t+x;N)+\tilde{q}_{2m+1}(t-x;N)-\tilde{G}_{2m+1}(x,t;N) \tag{27}$$

とおくと、余弦三角補間式の誤差は結局、

$$f(x)-\bar{C}_N(f;x)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\{f^{(2i-1)}(\pi)\bar{Q}_{2i}(\pi-x;N)-f^{(2i-1)}(0)\bar{Q}_{2i}(x;N)\}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f^{(2m+1)}(t)\cdot\bar{G}_{2m+1}(x,t;N)dt \tag{28}$$

となることがわかる。

全く、同じようにして、正弦三角補間式、

$$\bar{S}_N(f;x)=\sum_{j=1}^{N-1}\bar{v}_j(f)\sin jx \tag{29}$$

の誤差を導くことができる。

4・おわりに、

ここでは、正弦・余弦三角補間の誤差がどのような式で与えられるかについて考察した。正弦三角補間については、補間係数の誤差を示したに過ぎないが、正弦三角補間式の誤差も余弦補間式のときと同じようにして導くことができる。これらを子細に検討すると、両端の高次微係数が零でないときに、補間式にどのような誤差が現れるかを知ることができる。今後、これらについて検討したいと考えている。

(参考文献) 1)秦野和郎:正弦・余弦複合多項式による関数近似,情報処理学会第40回全国大会論文集,6K-4