7Q－1

有向境界曲線列を持つ曲面の平均法線ベクトルの求め方

奥田　浩

株式会社　リコー

1　はじめに

3次元CADシステムにおいて、有向境界曲線列を持つ曲面の内外および大小判定を行うことは、重要な操作の一つである。従って、その高速化と精密化は非常に重要である。従来、平均法線ベクトルの計算は、[1] で示されたように、平面に含まれるポリゴンに対しては正確に求めることができていたが、平面に含まれていない場合は正確ではなかった。従って、平面に含まれない有向境界曲線列を持つ曲面について、内外および大小判定を、曲面をポリゴンで近似して、そのポリゴンの平均法線ベクトルを求めることによって行なうと、不正確な判定になっていた。この問題を解決するために、平均法線ベクトルの定義を、平面に含まれない有向境界曲線列を持つ曲面に対して拡張し、境界曲線上で線積分を行なって求める方法を考案した。これにより、有向境界曲線列を持つ曲面の内外および大小判定を、高速かつ正確に行なえるようになった。本論文では、平均法線ベクトルの新たな定義と性質とインプリメンテーション、および平均法線ベクトルの利用法を述べる。

2　平均法線ベクトルの定義

今、3次元ユークリッド空間に有向境界曲線列を持つ C^2 連続の曲面があり、境界は区分的に滑らか(piecewise smooth)であるとする。この時、次のように平均法線ベクトルを定義する。

定義 1 曲面を S、面積要素を dS で表す。また曲面上の各点における単位外法線ベクトルを(n_x, n_y, n_z) で表す。このとき、曲面の平均法線ベクトル $\tilde{\vec{n}}$ を

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{n}} &= (\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, \tilde{n}_z)\\ &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\iint_S n_x\, dS, \iint_S n_y\, dS, \iint_S n_z\, dS\right)\end{aligned}$$

と定義する。

ここで定義した平均法線ベクトルは、境界にのみ依存して定まる。これは、下に示す Stokes の定理 [2] を用いることにより、平均法線ベクトルの定義式を、次のように境界 C 上での線積分に書き直せることから直ちに判る。

$$\tilde{\vec{n}} = \left(\int_C y\, dz, \int_C z\, dx, \int_C x\, dy\right)$$

この式は、平均法線ベクトルの計算方法も与えていることに注意する。

定理 1 (Stokes) 空間内の開集合 D で定義された C^1 クラスのベクトル場

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

と、D の内部にある縁のある C^2 クラスの曲面 S と、その周 C に対して、

$$\int_C a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz = \iint_S (\mathrm{rot}\, \vec{a}, \vec{n})\, dS$$

が成り立つ。ここで $\vec{n}$ は、曲面の単位外法線ベクトル、また、

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\, \vec{a} &= \nabla \times \vec{a}\\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

である。

3　平均法線ベクトルの性質

まず、ここで与えた平均法線ベクトルが、同一平面に乗っているポリゴン
に対して定義されてきた平均法線ベクトルの、自然な拡張になっていることを示す。平均法線ベクトルの x 成分は、線積分の定義を考えることにより次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\tilde{n}_x &= \int_C y\, dz\\ &= -\int_C z\, dy\\ &= -\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{z_i + z_{i-1}}{2}(y_i - y_{i-1})\\ &= \frac{1}{2} \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{m} (z_{i-1} + z_i)(y_{i-1} - y_i)\end{aligned}$$

ここで、Δ は分割を表し、m は分割された小区間の数、$|\Delta|$ は分割された小区間の中で、最大のものの大きさを表す。最後の式の極限の中の総和を見るとわかるように、平面上

A CALCULATION OF MEAN NORMAL VECTOR OF A SURFACE WITH ORIENTED BOUNDARY

Hiroshi Okuda

Ricoh Co. Ltd.

にあるポリゴンに対しては、以前から得られている平均法線ベクトルと全く同じベクトルを与える。またこの式は、有向境界曲線列を持つ曲面を、その曲面に収束するポリゴンの列で近似するとき、対応する平均法線ベクトルの列の極限が、本論文における平均法線ベクトルであることを示している。つまり、ポリゴンで曲面を近似して平均法線ベクトルを求めることは、本論文の平均法線ベクトルを台形公式で数値積分することに他ならない。実際の CAD システムにおいては、通常、境界曲線は簡単な初等関数の組合せでパラメータ表現されるので、数値積分を実行するよりは、積分公式を適用して計算する方が高速かつ正確である。

次に、曲面がある平面に含まれるとき、平均法線ベクトルの大きさは、曲面の面積に等しい。これは、曲面の単位外法線ベクトルが一定なので、それを(a, b, c)とし、定義に基づいて計算すると、

$$
\begin{aligned}
\|\vec{n}\| &= \|(\iint_S a\,dS, \iint_S b\,dS, \iint_S c\,dS)\| \\
&= \iint_S dS \|(a, b, c)\| \\
&= \iint_S dS
\end{aligned}
$$

となることから判る。

さらに、平均法線ベクトルの大きさは、同一の境界を持つ曲面のうち、最小の面積を持つ曲面の面積を越えない。これも、定義に基づいて計算すると、

$$
\begin{aligned}
\|\vec{n}\| &= \|(\iint_S n_x\,dS, \iint_S n_y\,dS, \iint_S n_z\,dS)\| \\
&= \sqrt{(\iint_S n_x\,dS)^2 + (\iint_S n_y\,dS)^2 + (\iint_S n_z\,dS)^2} \\
&\leq \sqrt{(\iint_S (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\,dS)(\iint_S dS)} \\
&= \iint_S dS
\end{aligned}
$$

となることから判る。

4 インプリメンテーション

有向境界曲線列を持つ曲面について、境界の要素である曲線は多項式や有理式、あるいは三角関数等の初等関数を用いてパラメータ表現されていると仮定する。このとき、ある曲線上での線積分は、パラメータ空間における初等関数の積分に変換できる。従って、初等関数の定積分を計算するプログラムを書けば良い。

実際に境界曲線が Bézier 曲線である場合の計算例を示す。平均法線ベクトルの計算では、どの成分の計算も同様なので、ここでは、x 成分について示す。パラメータをt、パラメータ空間を$[0,1]$とするとき、x 成分は、

$$
\int_C y\,dz = \int_0^1 y(t)\frac{dz(t)}{dt}\,dt
$$

となる。次数をnとすると、Bézier 曲線であるので、$y(t)$はn次の Bernshtein の多項式

$$
B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}
$$

の１次結合で表現される。このとき、良く知られているように、Bézier 曲線の一階微分である

$$
\frac{dz(t)}{dt}
$$

は、$n-1$次の Bernshtein の多項式$B_{n-1,i}(t)$の一次結合で表現される。結局、

$$
\int_0^1 B_{n,i}(t) B_{n-1,j}(t)\,dt
$$

を求めれば良い。実際に計算を実行すると、次のようになる。

$$
\int_0^1 B_{n,i}(t) B_{n-1,j}(t)\,dt = \frac{\binom{n}{i}\binom{n-1}{j}}{\binom{2n-1}{i+j} 2n}
$$

5 平均法線ベクトルの利用法

平均法線ベクトルの主な利用として、立体データの生成がある。具体的には、B-reps. において、winged edge の生成に使用する。また、縮退した曲面の除去にも使用できる。これは、面積が 0 の曲面では、平均法線ベクトルが 0 ベクトルになることを利用する。その他の利用法として、隠線処理、曲面片が平面上に乗っている場合の面積の計算等がある。

6 おわりに

Stokes の定理を用いて平均法線ベクトルを求める方法を考案した。本手法を用いることにより、平面に含まれるポリゴンだけでなく、有向境界曲線列を持つ曲面に対しても、平均法線ベクトルを高速かつ正確に求めることができるようになった。本手法は、実際に 3 次元ソリッドモデラー DESIGNBASE V3.0 [3] において実現され、その有効性が確かめられている。

参考文献

[1] I. E. Sutherland, R. F. Sproull, R. A. Schumacker *A Characterization of Ten Hidden-Surface Algorithms* Computing Surveys, Vol. 6, No. 1, March 1974

[2] 岩掘 長慶 「ベクトル解析」, 裳華房, 1960

[3] Hiroaki Chiyokura, *Solid Modeling with DESIGNBASE*, Addison Wesley, 1988