開放型 BCMP 待ち行列網における最適ルーティングの解の唯一性

6N－7

亀田 壽夫　　張 勇兵
(電気通信大学情報工学科)

1 はじめに

コンピュータネットワークや分散型コンピュータシステムにおいてメッセージやジョブをどの通信路やどのノードのコンピュータによって処理させるかの問題がある [2, 3, 4]。このような問題は開放型 BCMP 待ち行列網における最適ルーティング [1] として考えることができる。本研究では、このような開放型 BCMP 待ち行列網における最適ルーティング問題の中で、システム全体にわたるジョブの平均滞在時間を最小とする全体最適化方式を考える。その最適方式において、解の満足すべき条件を求め、解が唯一に決まらないことがあることを示す。しかし、各ノードの利用率は唯一に決定されることをも示す。

2 モデルの記述

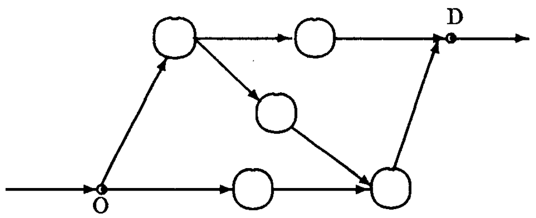

図 1: モデル

モデルは図1に示すように、M 個のサービスセンターをもつ開放型BCMP 待ち行列網とする。各サービスセンターは FCFS, LCFSPR, PS, 或は IS サーバとする。ネットワークに出発点と目的点があり、出発点と目的点の組合せは O-D pair という。1つの O-D pair の間に1つ以上の経路がある。ジョブは R クラスに分けられてネットワークにポアソン分布で到着する。ジョブの到着または処理はネットワークの状態に依存しないとする。ここで、各経路に流すジョブの割合を制御することによってシステム全体の性能指標を最適化する問題を考える。本研究で扱われる記号は次の通りである。

D^k　クラス k O-D pair の集合.

Π_d^k　O-D pair 間におけるクラス k の経路の集合.

Π^k　クラス k 経路の集合.

ϕ_d^k　クラス k O-D pair 間の到着率 $d, d \in D^k$.

Φ　システム全体の到着率, $\Phi = \sum_{k=1}^{R} \sum_{d \in D^k} \phi_d^k$.

x_p^k　経路 p を流れるクラス k ジョブの割合.

$$\delta_{ip} = \begin{cases} 1 & \text{サービスセンター } i \text{ が経路 } p \text{ に含まれる場合,} \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

I　IS サーバからなるサービスセンターの集合.

N　IS サーバ以外サーバからなるサービスセンターの集合.

μ_i^k　サービスセンター i におけるクラス k ジョブのサービス率.

t_p^k　$\partial(\Phi T)/\partial x_p^k$, 即ち, 経路 p におけるクラス k marginal delay.

システム全体のジョブ平均応答時間, T, は次のようになる。

$$T = \frac{1}{\Phi}\Big[\sum_{i \in N} \frac{\rho_i}{1-\rho_i} + \sum_{i \in I} \rho_i\Big]. \qquad (1)$$

ただし、次の制約条件が満足されなければならない。

$$\sum_{p \in \Pi_d^k} x_p^k = \phi_d^k, \quad d \in D^k, \quad k = 1, 2, \ldots, R,$$

$$x_p^k \geq 0, \quad p \in \Pi^k, k = 1, 2, \ldots, R.$$

ここで、$\rho_i = \sum_{k=1}^{R} \lambda_i^k/\mu_i^k$, $\lambda_i^k = \sum_{p \in \Pi^k} \delta_{ip} x_p^k$である。

3 全体最適化方式

全体最適化方式はシステム全体にわたってジョブの平均応答時間を最小とするもので、即ち、式(1) に関する非線形計画問題で、その解としては x, $\mathbf{x} = [x_p^k]$ を求めることである。Kuhn-Tucker 条件を用いることによって、最適解が次の関係を満足することがわかる。

定理 3.1 最適解 x は次の関係を満足する。

$$\sum_{k=1}^{R} \sum_{d \in D^k} \sum_{p \in \Pi_d^k} (t_p^k(\mathbf{x}) - \alpha_d^k) x_p^k = 0, \quad (2)$$

$$t_p^k(\mathbf{x}) - \alpha_d^k \geq 0, \quad p \in \Pi_d^k, \ d \in D^k, \ k = 1, 2, \ldots, R, \quad (3)$$

Nonuniqueness of Solutions for Optimal Static Routing in Open BCMP Queueing Networks
H. KAMEDA and Y. ZHANG
The University of Electro-Communications

$$\sum_{p\in\Pi_d^k} x_p^k = \phi_d^k,\quad d\in D^k,\quad k=1,2,\ldots,R,\quad (4)$$

$$x_p^k \geq 0,\ p\in\Pi^k, k=1,2,\ldots,R.\quad (5)$$

最適解が満足すべき条件は次の形でも表せる。

系 3.2 最適解 $\bar{\mathrm{x}}$ は次の関係を満足する。

$$\sum_{k=1}^{R}\sum_{p\in\Pi^k} t_p^k(\bar{\mathrm{x}})(x_p^k-\bar{x}_p^k) \ \geq\ 0,\quad \text{for all } \mathrm{x}$$

ここで、

$$\sum_{p\in\Pi_d^k} x_p^k \ =\ \phi_d^k,\quad d\in D^k,\quad k=1,2,\ldots,R,$$

$$x_p^k \ \geq\ 0,\ p\in\Pi^k, k=1,2,\ldots,R.$$

4 最適解の唯一でないことについて

補題 4.1 任意のx,x' $(\mathrm{x}\neq\mathrm{x}')$ に対して

$$\sum_{k=1}^{R}\sum_{p\in\Pi^k}(x_p^k-x_p'^k)[t_p^k(\mathrm{x})-t_p^k(\mathrm{x}')] > 0 \quad \text{if}\quad \boldsymbol{\rho}_U \neq \boldsymbol{\rho}_U' \ (6)$$

$$= 0 \quad \text{if}\quad \boldsymbol{\rho}_U = \boldsymbol{\rho}_U' \ (7)$$

ここで、$\boldsymbol{\rho}_U, \boldsymbol{\rho}_U'$ は x,x' によって決まる利用率ベクトルで、$\boldsymbol{\rho}_U=\boldsymbol{\rho}|_{\rho_i=0,\ i\in I}$, $\boldsymbol{\rho}=[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_M]$.

証明.

$$\sum_{k=1}^{R}\sum_{p\in\Pi^k}(x_p^k-x_p'^k)[t_p^k(\mathrm{x})-t_p^k(\mathrm{x}')]$$

$$= \sum_{i\in N}\frac{(\rho_i-\rho_i')^2[(1-\rho_i)+(1-\rho_i')]}{(1-\rho_i)^2(1-\rho_i')^2}.\quad (8)$$

待ち行列網の統計的平衡状態において、ρ_i, $\rho_i' < 1$, $i\in N$であるので、関係式 (6) と (7) が得られる。□

定理 4.2 全体最適化方式の解は唯一であるとは限らないが、各サービスセンターの利用率は唯一である。

証明. 式 (1) の中で、T が $\boldsymbol{\rho}$ のみに依存することを注意すると、この定理の前半は明らかである。定理の後半について、以下の通りである。2つの異なる最適解 $\hat{\mathrm{x}}$ と $\tilde{\mathrm{x}}$ があり、それらによって$\hat{\rho}_U$ と $\tilde{\rho}_U$, $\hat{\rho}_U\neq\tilde{\rho}_U$ができるとする。そうすると、系 3.2により、

$$\sum_{k=1}^{R}\sum_{p\in\Pi^k} t_p^k(\hat{\mathrm{x}})(\tilde{x}_p^k-\hat{x}_p^k)\geq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{R}\sum_{p\in\Pi^k} t_p^k(\tilde{\mathrm{x}})(\hat{x}_p^k-\tilde{x}_p^k)\geq 0.$$

それで、

$$\sum_{k=1}^{R}\sum_{p\in\Pi^k}(\hat{x}_p^k-\tilde{x}_p^k)\left[t_p^k(\hat{\mathrm{x}})-t_p^k(\tilde{\mathrm{x}})\right]\leq 0.$$

また、補題4.1から

$$\sum_{k=1}^{R}\sum_{p\in\Pi^k}(\hat{x}_p^k-\tilde{x}_p^k)\left[t_p^k(\hat{\mathrm{x}})-t_p^k(\tilde{\mathrm{x}})\right]> 0$$

が得られる。したがって、2つの異なる最適解がある場合は、それらによりできたρ_Uが同じでなければならない。□

以上の結果により、最適解の範囲は次の関係式によって表される。

$$\sum_{k=1}^{R}\sum_{p\in\Pi^k}\delta_{ip}\frac{x_p^k}{\mu_i^k}=\rho_i,\quad i\in N,\quad (9)$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{k=1}^{R}\sum_{p\in\Pi^k}\delta_{ip}\frac{x_p^k}{\mu_i^k}=\sum_{i\in I}\rho_i,\quad (10)$$

$$\sum_{p\in\Pi_d^k} x_p^k=\phi_d^k,\ d\in D^k,\ k=1,2,\ldots,R,\quad (11)$$

$$x_p^k\geq 0,\ p\in\Pi^k, k=1,2,\ldots,R,$$

ここで、ρ_i は最適解 x によって決まる利用率である。関係式 (9) - (11) から最適解となる集合は凸型の多面体となっていることがわかる。

例: 図1のようなモデルを考える。その中に5つのサービスセンター、1つの O-D pair と3つの経路があり、各サービスセンターは FCFS, LCFSPR 或は PS サーバのいずれであるとする。ジョブクラスは R である。そうすると、変数となる各経路を流れるジョブの割合の数が$3R$ となり、制約条件の数は$5+R$ となる。したがって、$R\geq 3$ の場合は、最適方式は唯一な解を持たない。

5 まとめ

開放型BCMP 待ち行列網モデルにおける最適ルーティング問題について、全体最適化方式の解は唯一であるとは限らないが、各サービスセンターの利用率は唯一であることがわかった。したがって、システムパラメータの影響を解析するとき、各サービスセンターの全体の利用率は有意義なパラメータで、各クラス毎の利用率は必ずしも意義を持っていないことに注意しなければならない。また、最適解が唯一とは限らないため、異なる方法で解を求めるとき、異なる解が得られる可能性がある。

参考文献

[1] F. Baskett *et al. J. ACM 22*, 2 (1975), 248-260.

[2] D. G. Cantor and M. Gerla. *IEEE Trans. Computers C-23*, 10 (1973), 1062-1069.

[3] L. Fratta, *et al. Networks 3*, (1973), 97-133.

[4] A. N. Tantawi and D. Towsley. *Proc. of PERFORMANCE' 84* (1984), North-Holland, N.Y., 277-291.