

1P-2

## 2次有理Bezier曲面の接続

斉藤 剛 ・ 穂坂 衛  
東京電機大学

### 1. はじめに

2次有理Bezier曲面同士または通常の(非有理)2次Bezier曲面とのC<sup>1</sup>接続の実現法を述べる。

球や回転体面は、解析的に単純であるとともに作成が容易であることから、工業製品の多くの部分に利用されている。これらの面は、陰関数表現や曲面に固有の表現形式で表現されてきた。これらの曲面の利点を考える時、曲面モデラとして、多項式曲面(通常の有理でない曲面)と統一的に扱える必要がある。

2次有理Bezier曲面式により、球や回転体面は正確に表現できる。また、通常のBezier曲面上の操作が、容易に拡張して適用できる。しかし、有理曲面式は、曲面上の諸量を求める計算式が複雑になり、その計算量も多い。さらに、有理パッチ生成や接続におけるウエイト操作の方法は未解決である。有理曲面同士のC<sup>1</sup>接続でさえ、その拘束条件が多く複雑であり、容易ではない<sup>1)</sup>。

一方、少なくともその接点では、接平面が一致している曲線ネットから、それらを境界辺とする、互に滑らかに接続されたパッチ群が構成できる<sup>2),3)</sup>。

本稿では、この手法を用いることにより、これまで困難であった有理Bezier曲面同士および有理でないBezier曲面とが滑らかに接続できることを示す。

本稿では、パッチの次数は2次、その接続条件はC<sup>1</sup>とする。これらは、実用上の理由からであり、高次パッチおよび高次微係数連続にも適用できる。

### 2. 曲面および接線ベクトルの表現法とパッチの接続

本稿では、Bezier曲面およびその接線の表現にシフト演算子<sup>2)</sup>を用いる。以後、「2次有理」と断らない限り、通常の非有理Bezierパッチ(曲面)を単に2次Bezierパッチ(曲面)と記す。

2次Bezier曲面を、 $u, v$ をパラメータとして、

$$S_r(u, v) = (1-u+uE)^2(1-v+vF)^2 P_{00} \quad (1)$$

と表す。 $P_{ij}$ は制御点、 $E, F$ はシフト演算であり、

$$E^j P_{0j} = P_{1j}, F^j P_{j0} = P_{j1} \quad (2)$$

である。また、2次有理Bezier曲面は、同様の方法にて、

$$S_r(u, v) = \frac{(1-u+uE)^2(1-v+vF)^2 W_{00} P_{00}}{(1-u+uE)^2(1-v+vF)^2 W_{00}} \quad (3)$$

と表す。 $W_{ij}$ は各制御点に付けられた重みである。

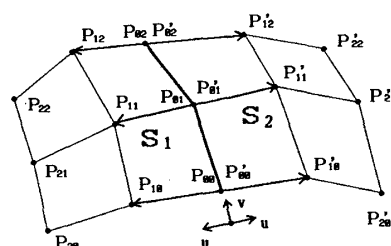


図1 制御点の記号と位置

2つのパッチ $S_1$ と $S_2$ を、互いに $u=0$ 辺でC<sup>1</sup>接続させるとする。位置の接続条件として、

$$S_{10}(0, v) = S_{20}(0, v) \quad (4)$$

また、接平面連続の条件として、スカラー三重積

$$[S_{1u}(0, v), S_{2u}(0, v), S_{1v}(0, v)] = 0 \quad (5)$$

が成り立たなければならない。

ここで、 $u=0$ 境界辺における境界横断方向の接線ベクトルは、(1)および(3)を $u$ で偏微分し、 $u=0$ とすることにより得られる。

$$S_{1u}(0, v) = 2(1-v+vF)^2(P_{10}-P_{00}), \quad (6)$$

$$S_{2u}(0, v) =$$

$$\frac{[(1-v+vF)^2 W_{00} \cdot (1-v+vF)^2 W_{10} P_{10} - (1-v+vF)^2 W_{10} \cdot (1-v+vF)^2 W_{00} P_{00}]}{\{(1-v+vF)^2 W_{00}\}^2} \quad (7)$$

これらを(5)に代入し、それを解くのは容易ではない。自明な解( $W_{1j}=W'_{1j}$ かつ $(P'_{1j}-P_{0j}) \cdot (P'_{1j}-P_{0j})=0$ ,  $j=0, 1, 2$ )はあるが、これでは他の周囲パッチとの接続はできない。3次かつ境界辺の重みが全て1である(すなわち、境界辺が多項式)とした場合は、文献1)で扱われ

ている。

そこで、(5)を解かずに、次に述べる微係数補正曲面を用いることにより、 $C^1$ 接続する方法を考案した。

3. 微係数補正曲面

ある2次パッチ $S$ (有理であっても、有理でなくともよい)を、基本曲面 $S_b$ と微係数補正曲面 $S_c$ との合成曲面として表現する。

$$S(u, v) = S_b(u, v) + S_c(u, v). \tag{8}$$

微係数補正曲面 $S_c$ は、その境界では消滅するが微係数は存在する曲面であり、基本曲面の各境界辺での微係数を補正する。 $S_c$ は、次式である。

$$S_c(u, v) = [T_a(1-u)v(1-v) + T_b(1-v)u(1-u) + T_c uv(1-v) + T_d uv(1-u)] \frac{(u(1-u)v(1-v))}{\{u(1-u)+v(1-v)\}^2} \tag{9}$$

曲面 $S_c$ には、次の性質がある。

$$S_c(0, v) = S_c(1, v) = S_c(u, 0) = S_c(u, 1) = 0. \tag{10}$$

また、その1次微係数には次の性質がある。

$$S_{c,u}(0, v) = T_a, \quad S_{c,v}(u, 0) = T_b, \\ S_{c,u}(1, v) = -T_d, \quad S_{c,v}(u, 1) = -T_c. \tag{11}$$

従って、パッチ $S$ の境界  $u=0$  における境界横断方向接線ベクトルは、次式となる。

$$S_u(0, v) = S_{b,u}(0, v) + T_a. \tag{12}$$

$T_a$ および $T_b$ は  $v$  の関数であってもよい( $T_c$ および $T_d$ は、 $u$  の関数)。本微係数補正曲面(7)の特徴は、(11)から分るように、各境界辺独立に、その1次微係数を補正できる点である。

4. 補正曲面を用いた有理曲面の $C^1$ 接続

2つの2次有理パッチ $S_1, S_2$ が、その基本曲面 $S_{1b}, S_{2b}$ の  $u=0$  境界で $C^0$ 接続しているとする。両パッチが接平面連続である十分条件は、(5)より、すべての  $v$  ( $0 \leq v \leq 1$ ) に対して、

$$\alpha S_{1,u}(0, v) + \beta S_{2,u}(0, v) = 0 \tag{13}$$

が成立することである。ここで、

$$\Delta(v) = S_{1,b,u}(0, v) - k S_{2,b,u}(0, v) \tag{14}$$

と置く。 $\Delta(v)$ は、(7)から分るように、分子分母ともに  $t$  の4次式である。各パッチの微係数補正曲面 $S_{1c}, S_{2c}$ の中の $T_{1a}, T_{2a}$ を、

$$T_{1a} = -\mu \Delta(v) \\ T_{2a} = -(1-\mu) \Delta(v) \tag{15}$$

とする。この時、

$$S_{1,u}(0, v) + S_{2,u}(0, v) = (1+k) S_{2,b,u}(0, v) \tag{16}$$

となり、(11)を満たす。すなわち、 $C^1$ 接続となる。

ここで、 $\mu$ は、補正の分担具合を表すスカラーである。 $\mu = 1$ の時、その補正すべてが $S_{1c}$ で行なわれる。

一方が通常曲面 $S_b$ の場合、有理曲面における接境界の重みは、全て等しくなければならない。適当なパラメータ変換により、これらを「1」とできる。(5)の分母 $(1-v+vF)^2 W_{00}$ は1になる。従って、式(13)は、より簡単な式となる。

5. 応用例

以下に、本方法の応用例を示す。図2は、円筒すなわち有理曲面(中央部のハッチ領域)と通常多項式曲面の領域とを、緩衝領域(点線で示す)を用いて滑らかに接続した例を示す(図2参照)。緩衝領域は、4. で示した補正曲面で接線を補正した有理曲面であり、多項式曲面との接続境界辺の重みは全て1である。

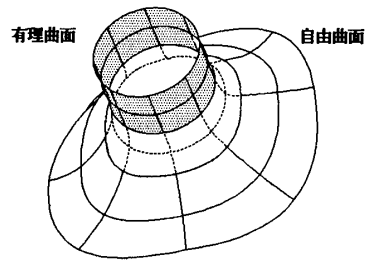


図. 2 有理曲面(円筒)と自由曲面との $C^1$ 接続 (点線で示した部分が緩衝領域)

6. まとめ

本論文では、いままで困難であった有理曲面同士および有理でない曲面との $C^1$ 接続法を示した。本方法は、境界が $C^0$ 接続され、その境界横断方向接線ベクトルの分布さえ分っていれば、どのような表現形式の曲面であっても $C^1$ 接続が可能である。本方法により、曲面設計の自由度がより高められたと考える。

参考文献

- 1) 中島 他：有理曲面式による自由曲面形状の生成と評価, 情報処理学会, G&CAD ソフトウェア '89-10.
- 2) 久志本, 穂坂：3 辺形パッチの接続とその応用 精密工学会誌 vol. 55, no. 10, pp. 67-72.
- 3) 穂坂他：曲面の接続と干渉, G&CAD ソフトウェア '87-10, 同 (続) G&CAD ソフトウェア '88-10.