# マンデルブロー集合と可視化

1P－1

石田則道
法政大学計算センター

## 1.はじめに

マンデルブロー (B.B.Mandelbrot)によって、生み出された”フラクタル理論”は、自然科学は勿論のこと人文科学、社会科学さらには芸術にまで広範囲にまたがる基本的な概念であり、新しい文化を形成しつつある。その図形は部分と全体との同形性に基づく、自己相似性という重要な性質を含んでいて、自然界に多く存在する現象である。

マンデルブロー集合は二次式による変換の繰り返しの結果として得られ、多様な図形が描ける。本文ではマンデルブロー集合をいろいろな形で表現し、他のフラクタル図形の可視化へ結びたい。

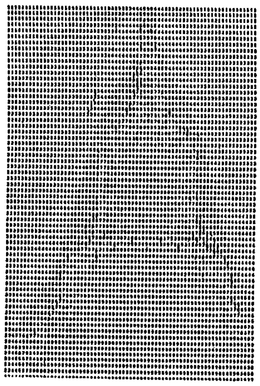


図1　文字出力による一部

## 2.マンデルブロー集合

複素数の二次方程式 $f_c(Z) = Z^2 + C$について Zの漸化式 $Z_{n+1} = f_c(Z_n)$ を考え、Cの値によって収束性が決定する複素数系列 $\{Z_n\}$ を求めることができる。初期値を$Z_0 = 0$とし、Cを複素平面上の値として計算を繰り返すと、Cの値によって絶対値が無限大に発散していく点と、発散しない点ができる。この発散しない点の集合をマンデルブロー集合と呼ぶ。無限大に発散するかどうかの判定は、複素数の絶対値が2を越えるかどうかで近似的に判定する。そして、そのときの繰り返し回数の限度は表現方法によって決めればよく、大まかな輪郭表現ならば数十回で充分であるが、詳細な表示を望むならば繰り返し回数を数百回に設定する必要がある。なお、Cを複素定数としZを複素平面上の値としたとき初期値$Z_0$の値によってはある定常状態（フラクタル・アトラクタ）に達する。この状態に達した$Z_0$の集合はジュリア集合と呼ぶ。

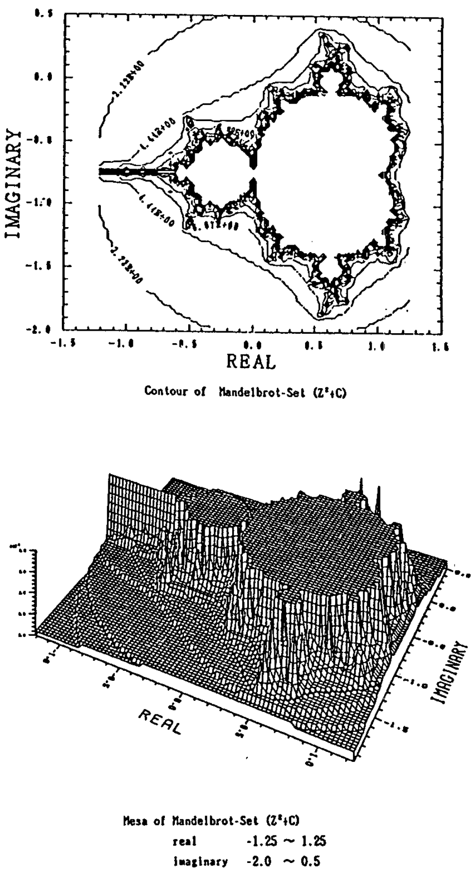



図2　マンデルーブロー集合の等高線表示と3次元表示

## 3.計算結果と表現

単純な複素二次式にも関わらず発散するまでの繰り返し回数に応じて、グラフィック・ディスプレイの各ピクセルを発色させると思いもよらない美しい模様が描ける。総じて、フラクタルの多様性とコンピュータの実用性とが相まって、CGの一つの表示方法として、新しい位置を占めつつある。

最も簡単な表現方法としては文字の羅列(図1)であろう。一方、最近の

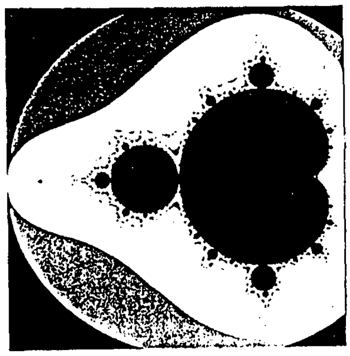
---

Mandelbrot sets and Visualization
Norimichi Ishida
Hosei University,Computer Center

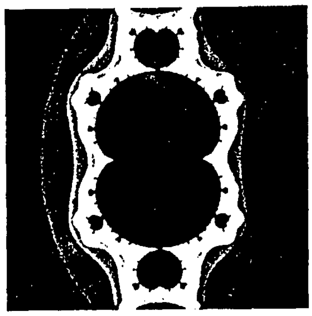
計算機環境では自由な選択が可能である。パソコンは手近な道具であり、色を用いれば全体像を把握するには便利だが、処理速度の点で問題がある。そこで、ホスト計算機を使って、マンデルブロー集合の繰り返し計算において発散するまでの回数を高さの関数として表現することを試みた。一つは等高線による表示、もう一つは３次元表示（鳥瞰図)(図２）である。前者は概略的な表示であったが、後者は興味ある形状であった。さらに、このアルゴリズムで３次（図３）、５次（図４）について表示を試みた。

メサ（台地）と名付けたこれらの図はコロラド高原やギアナ高地を想像させる魅力的な図形である。また，パソコンの手軽さと汎用機の計算能力を備えたＥＷＳの出現は時代の要請であり、今後の飛躍的な利用が予想できる。

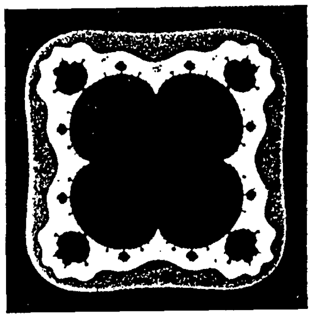
マンデルブロー集合の分解能の高い絵を描くには膨大な計算量が必要である。そのために、ＥＷＳを用いて計算し、発散するまでの繰り返し回数に応じて、表示する色をきめ細くすれば複雑で多彩な模様が作れる（図５）。



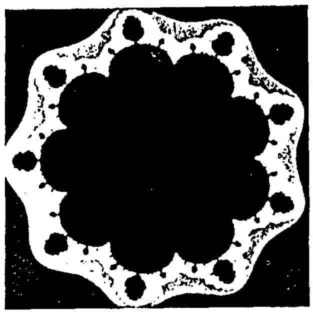
Mandelbrot-Set ($Z^2$+C)



Mandelbrot-Set ($Z^3$+C)



Mandelbrot-Set ($Z^5$+C)



Mandelbrot-Set ($Z^{10}$+C)

図５　EWS による
2, 3, 5, 10次の表示

4.まとめ

マンデルブローを複素平面上の写像関数で順次計算し、その表現をコンピュータ出力の可視化と言う視点で考えてみた。簡単な式から作り出される図形があまりにもみごとであり、そして美しいのに驚かされた。フラクタル図形の特徴は自己相似性にあり、全体が部分と相似であるという図形はよく見掛ける。全体と部分の調和、秩序と無秩序のほどよい調和は美を生み出すものである。これらはフラクタル思想に共通し、コンピュータを補助として新しい世界観が出来そうである。今後、マンデルブロー集合を基点としてフラクタルの個々の分野にコンピュータを通じて追求し、その可視化を試みたい。

参考文献


1) B.B.Mandelbrot:The Fractal Geometory of Nature、Freeman 1982
　　広中監訳：フラクタル幾何学、日経サイエンス社 1984
2) 宇敷重広：フラクタルの世界、日本評論社 1987
3) 高安秀樹：フラクタル、朝倉書店 1986
4) Becker & Dorfler: Dynamical system and fractal, Cambridge univ. press 1989
5) Micheal Barnsley: Fractal everywhere、Academic press 1988

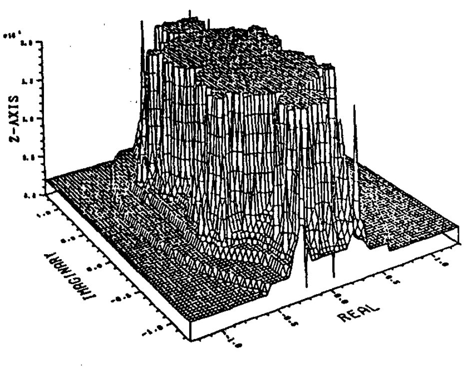




図３　Mesa of Mandelbrot-Set ($Z^3$+C)
real　-1.3 ～ 1.3
imaginary　-1.3 ～ 1.3

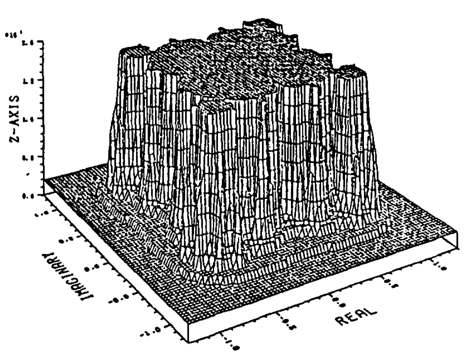



図４　Mesa of Mandelbrot-Set ($Z^5$+C)
real　-1.3 ～ 1.3
imaginary　-1.3 ～ 1.3