

7K-3

高レイノルズ数流れのための 上流型有限要素近似

藤間昌一, 田端正久

電気通信大学

0. はじめに

高レイノルズ数流れの現象を安定に近似するためには, 移流項に対する上流近似の技法が不可欠である. 我々は, 差分法の Kawamura et al. [1] の考え方を有限要素法に取り入れた, 新しい3次精度上流型有限要素近似を開発した. 本近似は有限要素法の特長である要素分割の自由度を生かしており, 差分法でよく用いられる一般化座標の導入は必要ない. 従って, 方程式が変更されないという利点がある.

ここでは, 3次精度上流型有限要素近似の定義と, その高速な計算のために重要な上流点探索アルゴリズム, 及び, 数値例を示す.

1. Navier-Stokes問題の有限要素近似

非圧縮粘性流体の運動を記述する

Navier-Stokes方程式は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

である. ここに, \mathbf{u} は流速, p は圧力, Re は Reynolds 数, \mathbf{f} は外力である.

方程式(1)(2)を時間について刻み τ で差分化する,

$$\frac{1}{\tau} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + (\mathbf{u}^n \cdot \text{grad}) \mathbf{u}^n - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^n + \text{grad } p^{n+1} = \mathbf{f}^n, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (4)$$

ここに, \mathbf{u}^n, p^n は時刻 $n\tau$ での \mathbf{u}, p の値である.

空間の離散化には有限要素法を用いる. 基底関数として Bercovier-Pironneau [2] の要素を使う. これは圧力が3角形1次, 流速は各3角形を4分割した小3角形で

1次の要素である.

時間微分項は質量集中化を行い, 移流項以外は標準的な混合型有限要素近似を用いる. 移流項には次に説明する3次精度上流型近似を用いる.

2. 3次精度上流型有限要素近似

\mathbf{b} を与えられた流速, v_h をスカラー関数とする. 点 O を任意の節点, $b(O) \neq 0$ とする. ξ を $b(O)$ 方向の単位ベクトルとし, O を原点とする ξ 軸を考える. 点 W, U, D, B を図1のように選ぶ.

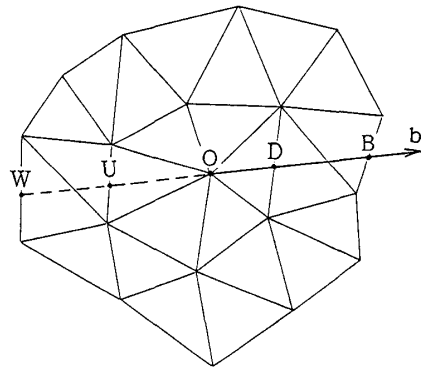


図1. 流速 \mathbf{b} と点 W, U, O, D, B

3次精度上流型近似を

$$(\mathbf{b} \cdot \text{grad } v_h)_h(O)$$

$$= |\mathbf{b}(O)| \sum_{P \in \{W, U, O, D, B\}} \gamma_P v_h(P) / h,$$

$$\gamma_P = \left\{ \prod_{Q \neq P, 0} (\xi_P - \xi_Q) + \alpha \right\} \quad (5)$$

$$/ \left\{ \prod_{Q \neq P} (\xi_P - \xi_Q) \right\}, P \neq 0,$$

$$\gamma_0 = - \sum_{Q \neq 0} \gamma_Q$$

で定義する. ここに, h は点 O まわりでの代表要素サイズ(長さ OU), 点 P の ξ 座標が ξ_P , α は4階の人工粘性量を調整する正定数 (≤ 6) である.

定理 v を滑らかな関数とする。 h に依存しない正定数 c_1, c_2 が存在して、

$$c_1 \leq \xi_B - \xi_D \leq \xi_D - \xi_O \leq \xi_O - \xi_U \leq \xi_U - \xi_W \leq c_2$$

ならば、

$$(b \cdot \text{grad } v)_h(0) = (b \cdot \text{grad } v)(0) + \frac{\alpha}{4!} |b(0)| \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}(0) h^3 + O(h^4). \quad (6)$$

3. 上流点の探索

本法では、各節点について点 U, W, D, B を探索する必要がある。従って、近似の実用性の観点から上流点探索の高速性が重要になる。そこで、この目的のための新しいアルゴリズム及びテーブルを開発した。本手法は3次元解析の場合にも自然に拡張できる。

(1) 上流点 U の探索アルゴリズム

点 O を含むある要素を $\triangle OP_1P_2$ とする。

点 O での流速 b を、

$$\vec{b} = c_1 \frac{\vec{OP}_1}{OP_1} + c_2 \frac{\vec{OP}_2}{OP_2} \quad (7)$$

と表すとき、 $c_1 \leq 0$ かつ $c_2 \leq 0$ なら、上流点 U は線素 P_1P_2 上にある。しかしもし、 $c_1 > 0$ ($c_2 > 0$) ならば、線素 OP_2 (OP_1) を共有する隣接要素について同様に調べればよい。この方法により必ず上流点 U が見つかることは図2より明らかである。

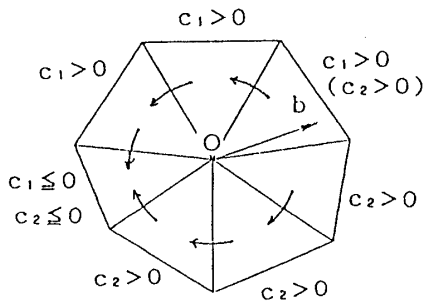


図2. 上流点 U の探索アルゴリズム

(2) 第2上流点 W の探索アルゴリズム

初めに線素 P_1P_2 を上流点 U を含む線素 $P_1^U P_2^U$ とする。 $P_1^U P_2^U$ を含む点 O と反対側の要素を $\triangle P_1QP_2$ とする。このとき、線素 P_1Q と線素 QP_2 の一方は必ず、点 O から $(-b)$ 方向の半直線と交差する。その線素を新しい P_1P_2 とし、この手続きを繰り返す。最初に $P_1 \neq P_1^U$ かつ $P_2 \neq P_2^U$ となる P_1P_2 を $P_1^W P_2^W$ とすると、点 W はこの線素上にある。

(3) 要素間連絡テーブル

各探索アルゴリズムを高速に実行するために、要素から隣接要素への対応表を用いる。表の大きさは、(要素数) \times 3 であり、内容は(隣接要素番号) \times 3 + (局所線素番号) である。

4. 数値計算例

円柱まわり流れの計算を行った。計算領域は $[-7.5, 22.5] \times [-7.5, 7.5]$ であり、原点に直径1の円柱を置いた。用いた要素分割の要素数は、4,320である。

$Re=10 \sim 10000$ について計算を行ったところ、円柱の抗力係数 C_D の値は実験結果 [3] とよく一致した。 $Re=10000$ での流線を図3に示す。

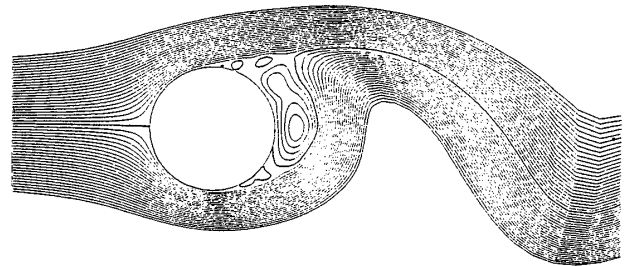


図3. 円柱まわり流れ, $Re=10,000$

5. おわりに

新しい3次精度上流型の有限要素近似を示した。本法は、問題の状況に応じて必要な安定化効果が設定できるため、高い精度の数値解が期待できる。

計算には、東京大学大型計算機センター HITAC M-680H を使用した。

参考文献

- 1) Kawamura, T. 他, AIAA-84-0340.
- 2) Bercovier, M. 他, Numer. Math., 33, 211(1979).
- 3) Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, 1979.
- 4) Tabata, M., Fujima, S.: Proc. FEMIF7, 1034 (Univ. Alabama in Huntsville Press, 1989).
- 5) 田端正久: 日本数学会秋季総合分科会 応用数学分科会講演アブストラクト, 157(1989).