5K－2

グラフの最適系列分割アルゴリムの改善

加地太一　大内　東　加地郁夫
北海道情報大学　北海道大学　北海道工業大学

１．はじめに

本論文はノードが番号順に列をなし、あるサイズ以下の部分集合に、カットされるエッジのコストの総和を最小分割する問題である。応用例としてはページングにおける仮想アドレスへのプログラムの最適配置などがある。　この問題に対してKernighan[1]はダイナミックプログラミング（ＤＰ）を示している。　本論文ではこれに対して、Branch-and-Bound法（Ｂ＆Ｂ）法によるアルゴリズムとKernighanによるＤＰアルゴリズムの改良型（改良型ＤＰ）を提案する。

２．問題の設定

ノード$N=\{1、2、\cdots、n\}$、エッジ$E=\{e_1、e_2、\cdots、e_r\}$からなる　無向グラフを$G=\{N、E\}$とする。各エッジは非負のコスト$C=\{c_1、c_2、\cdots、c_r\}$をもつ。この時Gの各ノードは$\{w_1、w_2、\cdots、w_n\}$の重さをもち、各々$0<w_i\leqq p$となる。ここで、Ｐはブロックサイズと呼ばれる正の数である。また、ノード集合Sの重さは$|S|=\Sigma_{i\in S}w_i$となる。

Gをｋ個のサブ集合G_1、G_2、・・・、G_kに、以下の制約のもとで、カットされるエッジのコストの総和が最小になるよう分割する。

（１）$|G_i|$＝部分集合のノードの重みの総和≦Ｐ

（２）任意のG_iの各ノード番号は連続的な数をもつ

部分集合G_iはブロックと呼ばれ$G_i=\{j, j+1, \cdots, m-1, m\}$となる。$G_i$での一番小さなノードの名前を$b_i$として、ブレイクポイントと呼ぶこととする。$b_i=j$はノード$j-1$とノード$j$の間でカットすることを意味する。　集合$\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$は一意的に分割$\{G_1, G_2, \cdots, G_k\}$を表現する。

ここで、グラフGが有向グラフであり、かつ（i，j）と（j，i）のエッジを含んでいるのなら、$i<j$である単一エッジ（i，j）におきかえる。　その時のコスト$C'ij=Cij+Cji$となる

例）

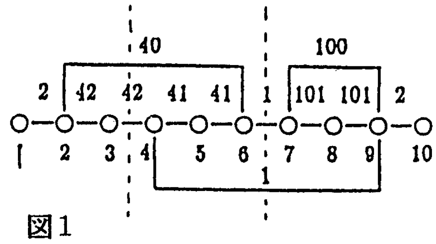

図1

図１は連続的なノード$N=\{1, 2, \cdots, 10\}$であり、上部の数字のコストをもつエッジからなるグラフである。また各ノードのウエイトは１とする。図１のグラフに対してブロックサイズＰ＝４で、この問題の最適解を求めた場合、上図の破線でカットされる。このとき、各部分集合は$\{1, 2, 3, 4\}$，$\{5, 6\}$，$\{7, 8, 9, 10\}$となり、ブレイクポイントの集合は$\{1, 5, 7\}$となる。また、最小となるコストの総和は８３である。

３．アルゴリズム

この問題に対してＢ＆Ｂによる解法および改良型ＤＰによる解法を構成する。

３．１）Branch－and－Bound法（B&B）

Ｂ＆Ｂ法は最適化問題を分岐と限定をくりかえして解く手法である。Ｂ＆Ｂ法の効率を上げるために以下の点がポイントである。

（１）分枝規則

（２）限定規則

（３）探索戦略

３．１．１）分岐規則

分岐木を作成する段階においていかに探索空間を小さくするかが問題である。分枝規則としてはノード系列の初期値を開始点として次の２つの性

Improvement for Optimal Sequential Partitions of Graphs
Taichi Kaji, Azuma Ohuchi, Ikuo Kaji
Hokkaido Information University, Hokkaido University, Hokkaido Institute of Technology

質により順次展開していく。
1）各ブロックの大きさがPを越えてはならない。
2）あるブロックを細分化すればコストへの寄与が大きくなる。ゆえに探索木の中で、あるブロックとそのブロックを細分化した状態が生じるとき、細分化した状態をコスト最小化の立場で無視してよい。

1）と2）の規則より次の不等式が導ける。

$$BP_{i-1}+P \geqq BP_i > BP_{i-2}+P$$

（ノードウェイト＝1のときの不等式）

BP_i ： i番目のブレイポイント

P ： ブロックサイズ

３．１．２）限定規則

1）下限値

下限値はその部分解におけるブレイクポイントによってカットされる全てのエッジの総和に等しい。この方法は以下の式で計算する。

部分解の評価値 ＝ 親ノードのコスト ＋ 増分コスト （1）

$$\text{増分コスト} = \Sigma_{y \leq i < x,\ j \geq x} C_{ij}$$

x ： 新しく展開されるブレイクポイント

y ： xの前のブレイクポイント

2）同レベル制限

確定部の長さが等しい部分解（同レベル部分解）の中で、最小コストを示す部分解から最適可能解が展開される可能性がある。ゆえに、それ以外の同レベル部分解からは最適解は展開されない。

３．１．３）探索戦略

ここで探索をどのような順番で行なっていくと効率がよいかが問題となる。探索の戦略によって探索部の領域が変わってくる。戦略が悪い場合、分枝のすべての部分を探索してしまう。ここではこの問題に効率のよい最良下限探索を採用する。

最良下限探索は探索過程の現時点でコストの値が最も低いノードを選んで進んでいくバックトラック法である。その時点までに得られているノードの中から、最も目標に近いノードを選んで展開する。この場合、前回のオープンリストをコストが大きい順から小さい順に並べるようにほどこすことによって最良下限探索となる。

３．２）改良型ＤＰ

ＤＰはブレイクポイントｘにおける最良な部分解をＴ（ｘ）とする漸化式で求める。

$$T(x) = \min_y \{T(y) + C(x, y)\}$$

ｙはｘの前のブレイクポイントであり、”ｙからｘ－１の距離≦Ｐ”の範囲である。Ｃ（ｘ，ｙ）は前のブレイクポイントｙに対して、次のブレイクポイントがｘとなる時のコストの増分である。

改良型ＤＰはＢ＆Ｂにおける分枝規則の制限より生じる以下の不等式

$$BP_{i-1}+P \geqq BP_i > BP_{i-2}+P$$

をｙの後方探索時に付加し、ステップ数の減少を考えた。

４．Ｂ＆Ｂにおける正当性

分岐規則の不等式は以下の定理より導かれる。

Ｔｈｅｏｒｅｍ１

最適解において、ノードウェイトの総和がＰとなる任意の範囲内において、３つ以上のブレイクポイントがおかれることはない。

同レベル制限は以下の定理より導かれる。

Ｔｈｅｏｒｅｍ２

同レベルｋの任意の２つの部分解をｐ，ｑとする。コストにおいてＣｏｓｔ（ｐ）＞Ｃｏｓｔ（ｑ）ならば、次期確定パターンの等しい子孫ｐｄ，ｑｄにおいてもＣｏｓｔ（ｐｄ）＞Ｃｏｓｔ（ｑｄ）が成り立つ。

以下の定理より最良下限探索法は無駄な探索が行なわない。

Ｔｈｅｏｒｅｍ３

探索に最良下限探索法を用いることによって任意の同レベルにおける最小値部分解が一番最初に展開される。

５．実験結果

今回の実験では、Ｂ＆Ｂおよび改良型ＤＰはステップ数においてＤＰよりも効率はよい。実行時間においてはＤＰと改良型ＤＰでは同等、Ｂ＆ＢではあるノードＰ数まで同等もしくはすぐれているが探索木の構造によって実行時間がかかる時がある。しかし、ブロックサイズＰに大きな値をもつ分割の場合、Ｂ＆Ｂおよび改良型ＤＰの実行時間はＤＰの実行時間より少ない結果となった。

参考文献

[1]Brian.W.Kernighan, Optimal Sequential Partitions of Graphs, J.ACM,Vol.18,No.1,(1971) pp.34-40.