7W-1

ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式の性質について

神田 徳夫
徳山高専・情報電子工学科

笹尾 勤
九州工業大学・情報工学部

１．まえがき

AND-OR二段論理回路は設計方法が確立しており，PLA構造でLSI上に効率よく実現できるため，広く利用されている．しかし，算術演算回路や誤り訂正符号の回路などでは，ANDおよびORのみで構成するよりも，EXORｹﾞｰﾄを併用するとｹﾞｰﾄ数を大幅に削減できる．著者らは与えられた論理関数をAND-EXOR二段論理回路として実現する方法として，ESOP論理式による方法を提案した［1］．しかし，ESOPの最小化問題は極めて困難であり，最小解を能率良く求める方法は知られておらず，現在のところ発見的方法を用いている［2］．

本稿では，網羅的方法によって求めた４変数ＮＰ同値類代表関数のAND-EXOR形の最小論理式の性質について検討する．

２．ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式の性質

【定義2.1】与えられた論理関数ｆを表現する論理式で，積項数が最小のものをｆの最小形という．

【定義2.2】

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Sigma \oplus x_1^{S_1} x_2^{S_2} \cdots x_n^{S_n}$$

をＡＮＤ－ＥＸＯＲ形論理和形（ＥＳＯＰ）という．

ここで　$s_i = \{0, 1\}$，$x_i^0 = \overline{x}_i$，$x_i^1 = x_i$，

$x^{\{0,1\}} = 1$，$x^{\phi} = 0$　である．

従来，与えられた論理関数をANDおよびEXORｹﾞｰﾄで表現する方法として，正極性Reed・Muller標準形（ＰＲＭＥ），固定極性Reed・Muller標準形（ＦＲＭＥ），混合極性Reed・Muller標準形（ＭＲＭＥ）が提唱されているが，ＥＳＯＰが最も一般化された式である．そのため，ＥＳＯＰの最小形の積項数が最も少ない．

４変数ＮＰ同値類代表関数の最小ESOPは網羅的方法で求めた．すなわち，まず積項数１個で実現できる関数を全て生成し、順次積項数を増加して全ての４変数関数を生成すると計算を終了する．最小論理式は，まず，第一に積項数が最小，次に論理式中のリテラル数の総和が最小のものを求めている．

【定義2.3】$S_i \subseteq \{0, 1\}$，$S_i \neq \phi$ $(i=1,2,\cdots,n)$ のとき，積項　$T = x_1^{S_1} x_2^{S_2} \cdots x_n^{S_n}$　において，$S_i \neq \{0,1\}$であるリテラルの個数を項Ｔの次数という．論理式において項の次数の最大値をその論理式の次数という．

【補題2.1】ｎ変数関数

$$f = x_1 x_2 \cdots x_n \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_n \qquad (n=2r)$$

をＦＲＭＥで表現するために必要かつ十分な積項数は $2 \cdot (2^r - 1)$ である．

【補題2.2】ｎ変数関数

$$f = x_1 x_2 \cdots x_n \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_n$$

は積項数ｎ，次数ｎ－１のＭＲＭＥで表現できる．

【補題2.3】ある関数ｆを表現するＥＳＯＰの次数をｋとする．このとき，ｆのＰＲＭＥの次数は高々ｋである．

【定理2.1】関数ｆのＰＲＭＥの次数がｋのとき，ｆのいずれのＥＳＯＰの次数もｋ以上である．

【定理2.2】次数が高々ｋのＥＳＯＰで表現可能なｎ変数関数の個数は　$\Phi(n, k) = 2^{\eta(n,k)}$　である．

ここで　$\eta(n,k) = {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_k$　である．

【例2.1】

$\Phi(4,0) = 2^1 = 2$

$\Phi(4,1) = 2^{(1+4)} = 32$

$\Phi(4,2) = 2^{(1+4+6)} = 2048$

$\Phi(4,3) = 2^{(1+4+6+4)} = 32768$

$\Phi(4,4) = 2^{(1+4+6+4+1)} = 65536$

これより，４変数関数をＥＳＯＰで実現するためには次数４が必要である．

【定義2.4】関数ｆの最小ＥＳＯＰの積項数を $t_e(f)$ で表す．

最小ＥＳＯＰは次の性質を持つ．

【定理2.3】関数ｆが $f = x^* \oplus g$（ここで，ｇはｘ以外の変数の関数）と表現できるとき，

$t_e(f) = \min(t_e(g), t_e(\overline{g})) + 1$ である．

【定理2.4】関数ｆが $f = x^* \cdot g$　（ここで，$x^* = x$ または $\overline{x}$，ｇはｘ以外の変数の関数）と表現できる

On the properties of AND-EXOR minimum expressions

Norio KODA　　Tsutomu SASAO
Tokuyama College of Technology　Kyushu Institute of Technology

とき，$t_e(f) = t_e(g)$ である．

【補題2.4】 $f = x^* \cdot g \rightleftarrows \overline{x^*} \cdot f = 0$.

【補題2.5】 $f = x^* \oplus g \rightleftarrows f(|\overline{x}) \oplus f(|x) = 1$.

【補題2.6】 $t_e(f) \leq |f|$.

【定理2.5】論理関数 f の最小項の個数が奇数のとき，f のＥＳＯＰは最小項を含む．

【例2.2】２変数関数 $f = x_1 \vee x_2$ の最小項の個数は３である． この関数のＥＳＯＰは，$x_1 \oplus \overline{x}_1 x_2$，$x_2 \oplus x_1 \overline{x}_2$，$x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$，$1 \oplus \overline{x}_1 \overline{x}_2$ などいろいろ考えられるが，いずれも最小項を含む．ただし，ＥＳＯＰに含まれる最小項は f に包含される最小項であるとは限らない． （例題終）

【定理2.6】論理関数 f の最小項の個数が奇数のとき，

$$t_e(f) = \min_{a_i \in B_n} \{ t_e(f \oplus x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \cdots x_n^{a_n}) \} + 1$$

が成立する．ここで，$B_n = \{0, 1\}^n$.

関数 f とその否定 $\overline{f}$ の最小ＥＳＯＰは次の性質を持つ．

【定理2.7】 $|t_e(f) - t_e(\overline{f})| \leq 1$

【定理2.8】 $g = \overline{f}$ とし，$t_e(f) < t_e(g)$ とする．Ｆが f の最小ＥＳＯＰならば，$F \oplus 1$ は g の最小ＥＳＯＰである．

関数 f をシャノン展開し，部分関数を検討することにより，最小ＥＳＯＰの積項数の下界を知ることができる．

【定理2.9】 $f = \overline{x} f_0 \vee x f_1$ としたとき，

$t_e(f) \geq \mathrm{MAX}(t_e(f_0), t_e(f_1))$.

【例題2.3】 $f = acd \oplus bcd \oplus ab\overline{c}$ を表現する最小ESOPの積項数が３であることを示す．上式において $d = 1$ とおくと，$f(d=1) = f_1 = ac \oplus bc \oplus ab\overline{c}$ となる．この関数 f を表現するために必要な積項数は３である．（これは３変数関数の最小ESOP表から確認できる）．定理2.9より，f を表現するためには，少なくとも積項が３つ必要である． （例題終）

定理2.9を用いると，５変数以上の関数の最小ＥＳＯＰの積項数の下界が求まる．

【５変数関数の最小ESOPを求める手続き】

1. 与えられた５変数関数 f を適当な方法で簡単化し、その積項数を t_a とする．
2. f を各変数に関してシャノン展開し， 各部分関数（全部で５×２＝１０個ある）の積項数を４変数関数の最小ESOP表を用いて求める．
3. 定理2.7を用いて f の最小ESOPの下界を求める．
4. 下界と t_a が一致すれば，求めたESOPは最小である．
5. 一致しなければ，求めたESOPの最小性は保証されない．

３．実験結果及び検討

表3.1は４変数関数をESOPで表現するために必要な積項数およびその積項数で表現できる関数の数の分布を示す．比較のために，AND-OR形最小論理式によって実現した結果も示す．これより，ESOPの場合は積項数６以下で，AND-ORの場合は積項数８以下で全ての関数が生成されており，全般的にESOPの方が４変数関数を実現するに必要な積項数が少ないといえる．このことは５変数以上の関数についても成立すると推測される．

４変数以下の論理関数は，本稿で求めた最小ESOPにより直ちに最小形を得ることが出来る．５変数関数については，その一部の関数は適当な変数でシャノン展開し，これに４変数最小形を適用することにより短時間に最小形を得ることが可能であり，この方法は６変数以上の関数にも適用可能である．

４．あとがき

本稿では、４変数AND-EXOR最小論理式を求め，得られた最小論理式の性質について考察した．今後の課題としては、４変数AND-EXOR最小論理式を用いて５変数以上の論理関数を簡単化する手法の開発が考えられる．

表3.1 AND-OR形最小論理式及びAND-EXOR形最小論理式で実現される４変数関数の個数の比較

積項数	ＡＮＤ－ＯＲ		ＡＮＤ－ＥＸＯＲ	
	代表関数の個数	関数の個数	代表関数の個数	関数の個数
0	1	1	1	1
1	5	81	5	81
2	21	1804	27	2268
3	75	13472	121	21744
4	156	28904	200	37530
5	98	17032	46	3888
6	33	3704	2	24
7	10	512	-	-
8	3	26	-	-
合計	402	65536	402	65536

５．参考文献

[1] 笹尾，Ph.W.Besslich， ”ＥＸＯＲアレイ付きＰＬＡの複雑度”，電子通信学会ＦＴＳ研究会，FTS86-17，1986-11.

[2] 笹尾，東田， ”入力デコーダ付きAND-EXOR形PLAの設計アルゴリズムについて”，第20回ＦＴＣ研究会，1989-01.

[3] 神田，笹尾，”４変数ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式とその性質”，第21回ＦＴＣ研究会，1989-07.