2次曲面の干渉と表示

7K-3

○斉藤　剛　・　穂坂　衛
東京電機大学

1．はじめに

本報告では２次曲面の交線を求める方法を提案する．２つの２次曲面の交線を求める方法は，大別して幾何学的方法[1]と代数的方法[2]がある．前者は各々の曲面の型に応じた方程式を用いる．交線は，交線附近の局所的な幾何学的性質や量を用いて隣接点を逐次求めることにより得るのが一般的である．この方法では，特異点附近でも安定していること，全ての交線が求められていることを保証しなければならない．後者は２つの曲面から線織面となるペンシル(pencil)[2]を求め，これを用いる．交線は，ペンシルの母線と元の曲面の何れかとの交点を求めることにより得る．母線と２次曲面との交点は２次方程式の解として得られる．この方法は，エレガントであるが，線織面となるようなペンシルを求めるために４次方程式を解かなければならない．また，回転やスケーリング等の座標変換および判別式による曲面形状の分類を必要とし，それらには多くの誤差を伴なう．

本報告で提案する方法は，両方の良い点を取ったものである．その概要は以下の通りである．まず，両曲面を１つの座標面に平行な面で切断する．切断面は２次曲線となる．それらの交点をペンシルを用いて求める．切断面を平行に僅かに移動した時，切断面の２次曲線，それらのペンシルおよび交点も僅かに移動する．このペンシルの移動を「トレース」することにより，その交点の移動として交線を得る．本方式では，ある切断面でのペンシルを一度求めれば，２次方程式を解くだけで，最大４つある交点の全てが求まる．また，特異点や極値点は，ペンシルの数（３次方程式の根の数）および交点の数（２次方程式の根の数）から検査することができる．

本報告では，まず，２次曲線の交点をペンシルを用いて求める方法を述べる．次いで，２次曲面の交線を求める方法を提案し，その例を示す．また，この応用例として２次回転体にフレット付けした例を示す．さらに，曲面上の輝度に基づいた，曲面の表示法を述べる．

２．ペンシルを用いた２次曲線の交点算出法

２つの２次曲線からは，２つの直線式の積の形をしたペンシルを作ることができる．これを用いると，交点は２次方程式の根として求まる．２次曲線をマトリクス表現する．曲線は添字で分ける．

$$\mathbf{r}_i = [\,x \quad y \quad 1\,] \begin{vmatrix} a_i & h_i & f_i \\ h_i & b_i & g_i \\ f_i & g_i & d_i \end{vmatrix} [\,x \quad y \quad 1\,]^T \qquad (1)$$

以後，上式のマトリクスをQ_iと表す．２つの２次曲線$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$のペンシル$\mathbf{r}(\mu)$とは，μを任意のスカラーとする時，マトリクス$Q_1-\mu Q_2$で表現される２次曲線である．ペンシル$\mathbf{r}(\mu)$が２つの直線の積となる条件は，

$$\det(Q_1-\mu Q_2)=0 \qquad (2)$$

である．これは，μの３次方程式であり，必ず１つの実根を持つ．(2)が３実根(これを，μ_a，μ_b，μ_cと書く)を持つ場合，各々の根に対応した３つのペンシルが構成される．各々を図１に示す．

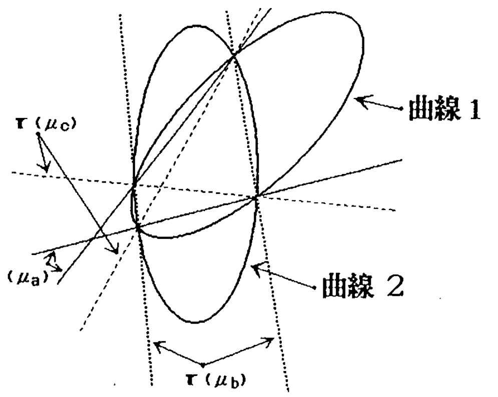

図１　曲線1,2から作られた３つのペンシル（$\mathbf{r}(\mu_a)$, $\mathbf{r}(\mu_b)$, $\mathbf{r}(\mu_c)$）と曲線の交点

(2)の任意の実根をμとすると，

$$\mathbf{r}(\mu)=L_1(x,y)\cdot L_2(x,y) \qquad (3)$$

となる．ここで，$L_i(x,y)=0$は，曲線$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$の交点を通る直線であり，$L_i(x,y)=0$と$\mathbf{r}_1$または$\mathbf{r}_2$との交点が，求める曲線同士の交点となる．

Interference of Two Quadrics and Their Display
Tsuyoshi SAITOH and Mamoru HOSAKA
Tokyo Denki University

3．2次曲面同士の交線

曲面の切断に先立ち，両曲面が干渉する可能性をテストする．可能性があれば，その範囲を座標面に平行な直方体として求める．曲面S_1，S_2を$z=z_0$面で切断し，それにより作られる2次曲線を以下とする$(i=1,2)$.

$$\mathbf{r}_i : a_i x^2+2h_i xy+b_i y^2+2f_i(z_0)x+2g_i(z_0)y+r_i(z_0)=0. \quad (4)$$

曲線$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$の交点は，2．で述べた方法で求まる．これにより曲面S_1，S_2の交線上の，$z=z_0$の点が求まる．

切断面をzから微小距離Δz移動させる．移動した面でのペンシルを求めるために，(2)の3次方程式式を解く必要がある．しかし，ペンシルの移動は滑らかであり，(2)の根も僅かに変化する．本方式では，この性質を利用し，3次方程式の解の近似値を求め，それを初期値としてNewton-Raphson法で収束させた．近似値は，以下の方法で求めた．(4)より，(2)にzを書き加え，

$$D(\mu, z) = \begin{vmatrix} a_1-\mu a_2 & h_1-\mu h_2 & f_1(z)-\mu f_2(z) \\ h_1-\mu h_2 & b_1-\mu b_2 & g_1(z)-\mu g_2(z) \\ f_1(z)-\mu f_2(z) & g_1(z)-\mu g_2(z) & r_1(z)-\mu r_2(z) \end{vmatrix} \quad (5)$$

と置く．ここで求めるべきは，$D(\mu_0, z_0)=0$である時の，$D(\mu_0+\Delta\mu, z_0+\Delta z)=0$を満たす$\Delta\mu$である．1次項までTaylor展開し整理する．$\Delta\mu$の1次式となる．

$$\left. \Delta\mu\frac{\partial D(\mu, z)}{\partial\mu} + \Delta z\frac{\partial D(\mu, z)}{\partial z} \right|_{\mu=\mu_0,\, z=z_0} = 0 \quad (6)$$

(6)により求めた$\mu_0+\Delta\mu$を初期値とすると，(2)の3次方程式は数回（図2，3では，1～3回）の繰返しで収束し1つの根が求まる．これを(2)に代入することにより，他は2次方程式を解けば得られる．根の数から，その切断面における交点の数が検査できる．例えば，3つの実根であれば交点は必ず4つある．

4．応用と2次曲面の表示

前節の方法により交線を求めた例を示す．図2は，2つの回転楕円体の例である．交線を書き加えた．点線は，見えない交線である．この例は，Levinの方法によれば，ペンシルを求めるために，回転・平行移動・スケーリングの全てを必要とする例である．

図2で用いた曲面の表示技法は，例えばドットプリンタなど輝度の調整ができない装置へ表示・出力するために開発した方法である．曲面を点の集合により表示する．平面に射影された点附近を，黒点の密度が曲面上の輝度に反比例するランダムパターンで塗りつぶした．輝度は，文献[3]で述べられる．2次曲面のみならず自由曲面にも応用できる方法である．

図3は，本方法のフィレット付けへの応用例である．2つの曲面に接するように球が移動したとする．この時，球の中心は，各々の曲面のオフセット面同士の交線上を移動する．図3は，球と両曲面の交線および球の移動により作られる包絡面を書き加えた．

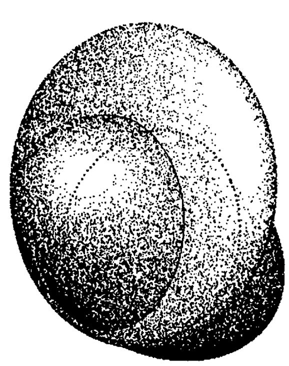

図2　求めた交線の例

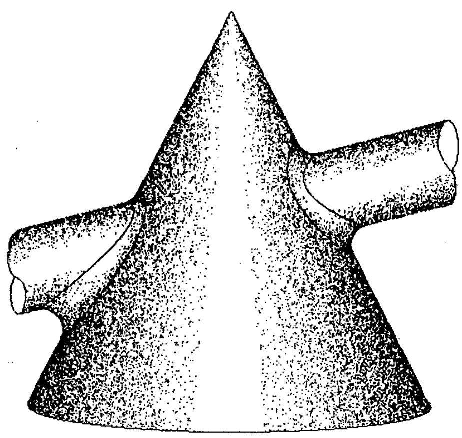

図3　フィレット付けへの応用

5．まとめ

2次曲面同士の交線を求める方法を述べた．本報告ではz軸面で切断したが他の軸でもよい．本方式とLevin[2]の方式との具体的比較を行なっている．また，4．は，オフセット面も2次曲面となる場合であるが，より広い範囲の2次曲面のフィレット付け法を現在検討中である．

参考文献

1）穂坂　他：曲線曲面の接続と干渉，情報処理学会G＆CADシンポジウム，(Oct. 1988).

2）J. Levin:A Parametric Algorithm for Drawing Pictures of Solid Objects Composed of Quadric Surfaces,Comm. ACM,Vol.19,No.10,(Oct. 1976).

3）穂坂　他：自由曲面の等傾斜線とその応用1，2　情報処理学会第39回全国大会予稿集.