自由曲面の等傾斜線とその応用－1

7K-1

穂坂　衛　　　○久志本琢也
東京電機大学工学部　　スタンレー電気（株）技術研究所

1．まえがき

筆者の一人は自由曲面の干渉と接続および評価の問題を取扱っているうちに，等傾斜線が等高線や曲率線と同様に曲面の性質について重要な情報を与えることに気が付いた．ここではその方程式を導き，それの利用の仕方を具体的に示す．等傾斜線のネットを描くことは，曲率線のネットを描くことより遙かに容易である．曲率線ネットは曲面固有の性質で定まり，そのパターンは僅かな形状変化に対して非常に敏感である．対象が自由曲面の場合には特異点であるUmbilicsがしばしば現れ，その附近での計算は不安定になりやすい．また曲率線ネットのパターンの解釈には微分幾何の深くかつ実際的知識が必要である．そのようなことから，より利用しやすい等傾斜線とそれに関連する事項を具体例とともに述べる．応用はこれに続く次の報告を参照されたい．

2．基礎方程式

曲面パッチを$\mathbf{S}(u,v)$で表す．ここでu,vはパラメータで$0 \leq u,v \leq 1$の値をとる．今，平面Fの法線方向を$\mathbf{n}_f$とし次の様な関数$\phi(u,v)$を定義する．

$$\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{S}(u,v) \equiv \phi(u,v) \qquad (1)$$

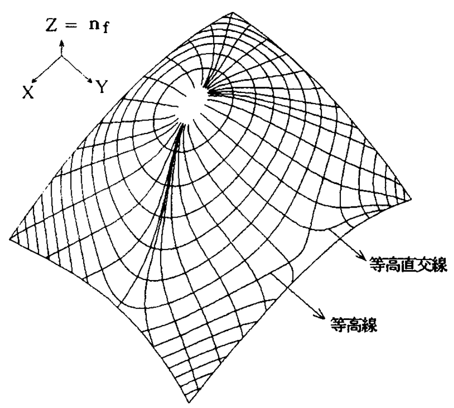

図1　等高線と等高直交線

(a)等高線および等高直交線(流線)

このような平面での断面線すなわち等高線の方程式は

$$\phi_u du + \phi_v dv = 0 \qquad (2)$$

で与えられ，これに直交する曲線群の方程式は

$$(\phi_v E - \phi_u F)du + (\phi_v F - \phi_u G)dv = 0 \qquad (3)$$

となる(図1参照)．切断平面Fを変えることでより詳細な形状を把握できる．しかし量的な曲面の評価を行うにはこれらの曲線群だけではまだ情報不足である．

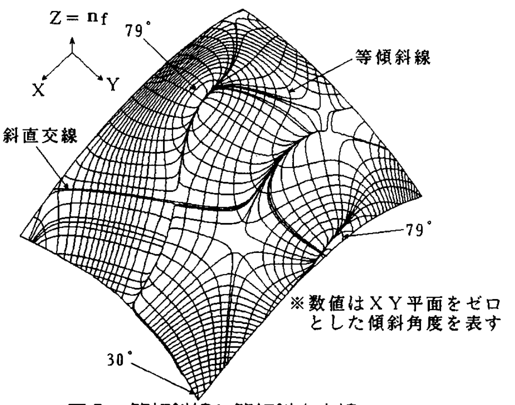

図2　等傾斜線と等傾斜直交線

(b)等傾斜線および等傾斜直交線

曲線において曲線形状とともに，そのホドグラフが曲線の性質の有効な情報を与えるように，曲面では接平面すなわち曲面の法線ベクトル$\mathbf{n}$で同様な図が考えられるが，これでは評価がしにくいから，形状とより密着した情報として等傾斜線を採用することにする．

σを曲面上の一点の法線方向ベクトル$\mathbf{n}$と基準平面Fとの間の角度とすると，等傾斜線上では

$$\sin\sigma = \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{n} = \text{const.} \qquad (4)$$

である．これを微分し次の関係(Weingartenの方程式)を利用する．

$$\mathbf{n}_u = \alpha \mathbf{S}_u + \beta \mathbf{S}_v, \quad \mathbf{n}_v = \alpha' \mathbf{S}_u + \beta' \mathbf{S}_v \qquad (5)$$

ここで

$$\alpha = (MF - LG)/(EG - F^2), \quad \beta = (LF - ME)/(EG - F^2)$$
$$\alpha' = (NF - MG)/(EG - F^2), \quad \beta' = (MF - NE)/(EG - F^2)$$

E,F,Gは曲面の１次規格量，L,M,Nは２次規格量である．これによって等傾斜線の方程式として次式を得る．

Equi-slope Curves and Silhouette Curves of Free-form Surface

Mamoru HOSAKA* and Takuya KUSHIMOTO**
*Tokyo Denki University, **Stanley Electric CO., LTD.

$$(\alpha\phi_u+\beta\phi_v)du + (\alpha'\phi_u+\beta'\phi_v)dv = 0 \qquad (6)$$

上式に直交する曲線群の方程式は次式で与えられる.

$$\{(\alpha'\phi_u+\beta'\phi_v)E - (\alpha\phi_u+\beta\phi_v)F\}du +$$
$$\{(\alpha'\phi_u+\beta'\phi_v)F - (\alpha\phi_u+\beta\phi_v)G\}dv = 0 \qquad (7)$$

等高線のパターンより傾斜の緩急の状況がわかるように,等傾斜線では傾斜の変化の度合い,すなわち曲率に関係した量がわかる(図2参照).

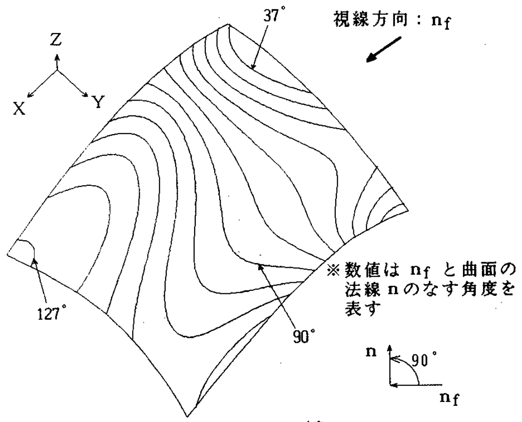

図3　シルエット線

(c)等輝度線およびシルエット線

もし$\mathbf{n}_f$が平行光線方向あるいは視線方向を表すならば,式(4)は次のように解釈できる. $\sigma \leqq 90$度の範囲においては,表面で光の拡散成分だけを考えれば,式(4)は等輝度線の方程式を表すことになる.それに直交する曲線に沿って輝度は漸変して行くと考えられる.これを利用した応用については,これに続く講演で説明する. $\sigma=90$度の場合は,視界の中にある見える表面では,シルエットを表すことになる(図3参照).見えない部分でのこの条件の曲線は,シルエット線の続きで,見える部分の続きとしてループをなす.曲面の背後にある物体あるいは曲面は,シルエット線で不可視の部分が定まる.

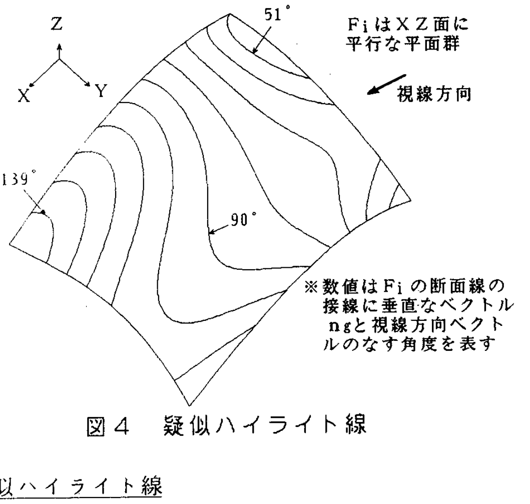

図4　疑似ハイライト線

(d)疑似ハイライト線

凹凸の少ない曲面の滑らかさを調べる手段として,(疑似)ハイライト線のパターンが用いられる.これはその面にほぼ垂直な平行平面群F_iで切断した多数の断面線S_iの変化の仕方を調べるためのものである.各S_iの同方向の接線の接点の軌跡を面上に描き,そのパターンで滑らかさや接続の良否を調べる.単位ベクトル$\mathbf{n}_g$を面F_iで断面線の接線に垂直なベクトル, $\chi=(\mathbf{n}_g\cdot\mathbf{S})$とするとハイライトの軌跡は次式を満足する.

$$\chi_u\phi_v - \chi_v\phi_u = 0 \qquad (8)$$

図3のシルエット線とおなじ曲面に対する疑似ハイライト線を図4に示す.双方を比較すれば大体似たパターンであることがわかる.計算手続の複雑さで比較すればシルエット線の方が求めやすい.

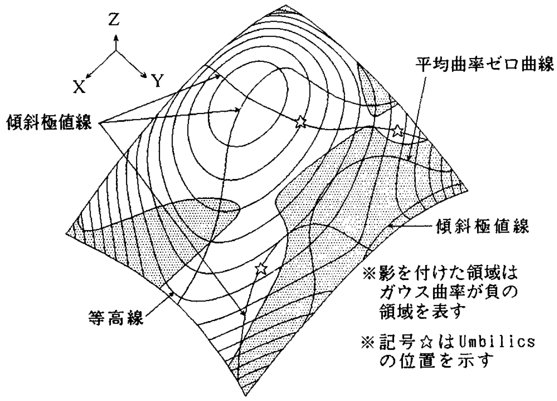

図5　傾斜極値線

(e)傾斜極値線

等傾斜線上ににおいて,$\mathbf{n}_f$方向に極値を取る点がある.$\mathbf{n}_f$をZ方向とするとそのような点の軌跡を傾斜ゼロの点から辿るのは最も降下(上昇)が遅いか最も早いかである.等傾斜線を求めるときにこのような点は求まるから,それらの点を結んだ傾斜極値線は容易に描くことができる(図5参照).その方程式は等傾斜線上の点,すなわち式(6)と曲面上のその点が$\mathbf{n}_f$方向に極値であることから定まり次式を得る.

$$\alpha'\phi_u^2 + (\beta' - \alpha)\phi_u\phi_v - \beta\phi_v^2 = 0 \qquad (9)$$

これを規格量を用いて書くと次式となる.

$$(MG-NF)\phi_u^2-(GL-NE)\phi_u\phi_v+(LF-ME)\phi_v^2 = 0 \qquad (10)$$

この式の別の解釈は曲率線上の点で$\mathbf{n}_f$方向に極値をとる点の軌跡であるということである.曲率線をトレースすることは計算的には等傾斜線のトレースより遙かに困難である.曲率線上での曲面法線$\mathbf{n}$の変化は曲率線上の接線方向であるというRodoriguesの定理を用いると,法線の$\mathbf{n}_f$方向の成分の変化は傾斜極値線上ではゼロ,すなわち極値をとることになる.また,傾斜極値線は曲面上のUmbilicsを通過する.