

CSGモデルにおける2次ブレンディング関数の構成

1K-9

— パラメータとその有効範囲 —

大倉 和博 嘉数 侑昇

(北海道大学 工学部)

1. はじめに

CSGモデルで扱われる曲面は陰関数表現可能なもののみである。陰関数表現された曲面は直感的な形状変化を生むパラメータを見つけにくい。現在のCSGモデルで扱う曲面は2次曲面がほとんどであり、それ以上の高次代数曲面は、トーラスを例外として扱われることがあまりない。

いくつかの陰関数で示された曲面をある関数(ブレンディング関数)で混ぜ合わせて高次曲面を得ようとする方法はHoffmannとHoperoft¹⁾によって提案された。この方法によって、元の曲面(原始曲面)の最大次数を n_p とし、ブレンディング関数のそれを n_b とすれば、最大 $n_p \times n_b$ の次数をもつ曲面(ブレンディング曲面)が定義された。また、それが原始曲面と接して接続するにはブレンディング関数の次数が2で十分であった。

本稿では、2次曲線(面)の束を使って2次ブレンディング関数を決定する手法を示す。これには新たなパラメータが含まれており、さらに曲面の形状変化の自由度を上げることができるを示す。

2. ポテンシャル法

ブレンディング操作 Φ は次の3つの関数の合成として定義できる(図1)。

$$\Phi : R^3 \rightarrow \{\text{inside, surface, outside}\} \quad (1)$$

$$\Phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$$

$$\begin{cases} \phi_1 : M \rightarrow N \\ \phi_2 : N \rightarrow L \\ \phi_3 : L \rightarrow \{\text{inside, surface, outside}\} \end{cases}$$

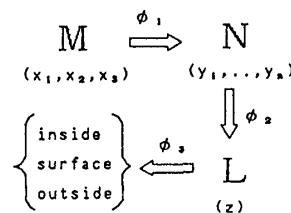
ただし、 $M : R^3 \quad N : R^n \quad L : R$

ϕ_1 は原始曲面が存在する空間Mから ϕ_2 が定義してある空間Nへ写像であり、原始曲面をそれぞれ各座標平面に写像するものとする。つまり、原始曲面が $y_1=0$ ($i=1..n$)で表現されるとき、 ϕ_1 を座標表示すれば、

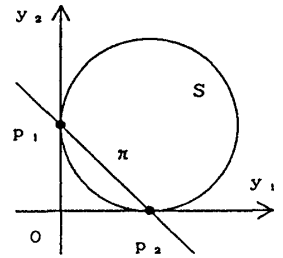
$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \\ y_n = y_n(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (2)$$

ϕ_2 はNからLへの関数であり、ブレンディング関数と呼ぶ。 $\phi_2^{-1}(0)$ がNの座標平面と接して接続する曲面であれば、Mに定義されるブレンディング曲面 $\phi_1^{-1} \circ \phi_2^{-1}(0)$ は、原始曲面と接して接続する。 ϕ_2

の形によって、ブレンディング曲面の形は変化する。 ϕ_3 は空間属性を判定をするもので、 $z < 0 \rightarrow \text{inside}$, $z = 0 \rightarrow \text{surface}$, $z > 0 \rightarrow \text{outside}$ とする。



(図1) ポテンシャル法



(図2) 束を構成する2次曲線

3. ブレンディング関数の決定

(1) $n=2$ のとき

Nを2次元とする。各座標軸に $p_1(0, 1)$, $p_2(1, 0)$ で接するすべての2次曲線を求めたい。その前に、束について定義する。²⁾

[2次曲線束] $y(y_1, y_2, 1)$ として

$$2\text{次形式 } S_1 = y^T A_1 y, \quad S_2 = y^T A_2 y$$

$$\text{底円錐曲線 } s_1(S_1=0), \quad s_2(S_2=0)$$

$$2\text{次曲線束 } S_1 + \mu S_2 = 0 \quad (3)$$

μ : パラメータ

簡単のために $A_1 \neq A_2$ であるとする。 s_1 と s_2 は4つの共通点を持ち、束に含まれる2次曲線はこれらの点を必ず通る。束は退化した2次曲線を3つ含み、それらは μ についての3次代数方程式 $\det(A_1 + \mu A_2) = 0$ の根にそれぞれ対応し、2本の直線になる。

今、 s_1 と s_2 の4つの共通点として p_1, p_2 をそれぞれ2回ずつ持つようにすると、束の中のすべての2次曲線は p_1, p_2 で共通の接線をもつから、 s_1 を p_1, p_2 で各座標軸に接する円、 s_2 を p_1, p_2 を通る直線の2乗とした束を考える(図2)。

$$S + \mu \pi^2 = 0 \quad (4)$$

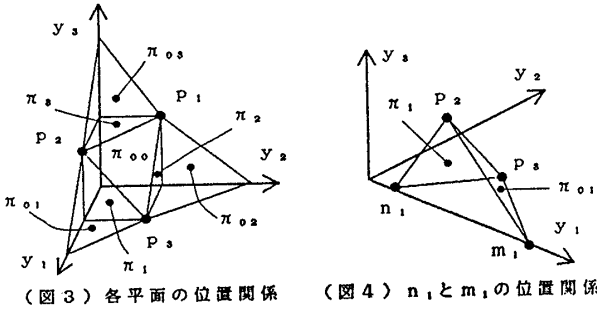
$$\begin{cases} S = 1 - (y_1 - 1)^2 - (y_2 - 1)^2 \\ \pi = -1 + y_1 + y_2 \end{cases}$$

このとき、与えられた条件を満足するすべての2次曲線は $\mu < 1$ で得られる。〈証明略〉

これから、ブレンディング領域を $N \cap [R^2 \wedge (\pi < 0)]$ 、ブレンディング関数 ϕ_2 を $z = S + \mu \pi^2$ ($\mu < 1$)とすれば、原始曲面に接して接続する曲面が得られる。

(2) $n=3$ のとき

$n=2$ のときと同様に考える。2次曲面束も同様に定義でき、4つの退化した2次曲面を含む。 $N(R^3)$ に4つの2次曲面を使って ϕ_2 を構成することを考える(図3)。まず、① $p_1(0, 1, 1), p_2(1, 0, 1), p_3(1, 1, 0)$ で各座標平面に接する2次曲面を考え、その後、②座標平面の2枚ずつの3つの組 $(y_1=0, y_2=0), (y_2=0, y_3=0), (y_3=0, y_1=0)$ をそれぞれ別の2次曲面で接続することを試みる。



① p_1, p_2, p_3 で各座標平面に接する球と、それらを通る平面の2乗で示される2次曲面束を考える。

$$S_0 + \mu \pi_{00}^2 = 0 \tag{3}$$

$$\begin{cases} S_0 = 1 - (y_1 - 1)^2 - (y_2 - 1)^2 - (y_3 - 1)^2 \\ \pi_{00} = -2 + y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

要求される条件を満足する2次曲面は $\mu < 1/2$ のとき得られる。〈証明略〉

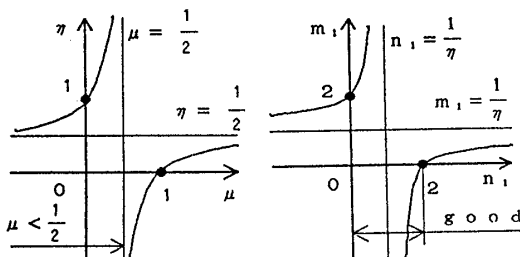
② 座標平面の組にそれぞれ接する2次曲面を求めるが、代表として $(y_2=0, y_3=0)$ をとる。①の束の中の2次曲面 S_1 と、 p_2, p_3 と y_1 軸上の点 $n_1(n_1, 0, 0)$ によって定まる平面 π_1 の2乗とにより構成される束 $S_1 + \mu_1 \pi_1^2 = 0$ を考える。この束の定めるすべての2次曲面に対して y_1 軸は直線 $p_2 p_3$ の極線になっているから、 n_1 の極平面 π_{01} が y_1 軸と交わる点を $m_1(m_1, 0, 0)$ とすれば、 m_1 の極平面は π_1 になる(図4)。 m_1 は次式で定まる。

$$m_1 = \frac{n_1 - 2}{\eta(\mu) - 1} \tag{6}$$

ここで、 $\eta(\mu) = (\mu - 1)/(2\mu - 1)$ である(図5)。座標平面に直線で接する2次曲面は m_1 を頂点にもつ錐面になるが、これが求める曲面である。このとき μ_1 は、

$$\mu_1 = -\frac{S_1}{\pi_1^2} \Big|_{m_1} = -\frac{S_0 + \mu_0 \pi_{00}^2}{\pi_1^2} \Big|_{m_1} \tag{7}$$

n_1 をパラメータとした場合、他の座標平面の組に



(図5) $\eta(\mu)$ の値域 (図6) m_1 の有効範囲

についても同様に導かれる n_2, n_3 に対して n_1 が独立であるためには、 $0 \leq n_i \leq 2$ である必要があり、これを有効範囲とする(図6)。 $n_1 = 1/\eta(\mu)$ のとき $m_1 \rightarrow \pm\infty$ となるが、このとき $m_1 = +\infty$ をとる。〈証明略〉

他の組についても同様に考えて整理すれば、

$$\begin{cases} \pi_{00} : (-2, 1, 1, 1) \\ \pi_1 : (-n_1, 1, n_1 - 1, n_1 - 1) \\ \pi_2 : (-n_2, n_2 - 1, 1, n_2 - 1) \\ \pi_3 : (-n_3, n_3 - 1, n_3 - 1, 1) \\ \pi_{01} : (-m_1, 1, m_1 - 1, m_1 - 1) \times \text{sgn}(m_1) \\ \pi_{02} : (-m_2, m_2 - 1, 1, m_2 - 1) \times \text{sgn}(m_2) \\ \pi_{03} : (-m_3, m_3 - 1, m_3 - 1, 1) \times \text{sgn}(m_3) \end{cases} \tag{8}$$

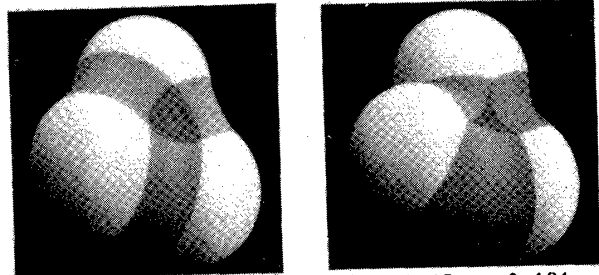
なお、式(8)では平面 $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ を (a_0, a_1, a_2, a_3) と略記した。 $(\pi < 0 : \text{TRUE}, \pi \geq 0 : \text{FALSE})$ と考えれば、ブレンディング領域は $[N | R^3 \wedge (\pi_{00} \vee \pi_{01} \vee \pi_{02} \vee \pi_{03})]$ と書くことができる。 ϕ_2 はパラメータとして $\mu < 1/2, 0 \leq n_1, n_2, n_3 \leq 2$ をもち、次のように書ける。

$$\begin{cases} \text{if}(\pi_{00} \wedge \pi_{01} \wedge \pi_{02} \wedge \pi_{03}) & z = S = S_0 + \mu \pi_{00}^2 \\ \text{if}(\pi_{01} \wedge \pi_1) & z = S + \mu_1 \pi_1^2 \\ \text{if}(\pi_{02} \wedge \pi_2) & z = S + \mu_2 \pi_2^2 \\ \text{if}(\pi_{03} \wedge \pi_3) & z = S + \mu_3 \pi_3^2 \end{cases} \tag{9}$$

このとき、 ϕ_2 はブレンディング領域内で C^1 級になり、ブレンディング曲面は原始曲面と接して接続する。

4. 実験

$n=3$ のとき、HoffmannとHopcroftの方法は、 $\mu=0, n_1=n_2=n_3=1/\eta(\mu)=\infty$ に相当する(図7)。 $\mu \rightarrow 1/2$ とすれば、曲面は原始曲面に近づく。 n_1, n_2, n_3 によってブレンディング曲面の幅が変わる(図8)。



(図7) $\mu=0, n_1=n_2=n_3=\infty$ (図8) $\mu=0.45, n_1=0.181, n_2=0.0, n_3=0.35$

5. おわりに

ポテンシャル法の2次ブレンディング関数を構成する新たな手法を示し、 $n=3$ のときパラメータ μ, n_1, n_2, n_3 を新たに含ませることができた。また、それを計算機実験により確かめた。

【参考文献】

- 1) C.Hoffmann and J.Hopcroft: Automatic surface generation in computer aided design, The Visual Computer, 1(1985), pp.95-100.
- 2) J.G.Semple and G.T.Kneebone: Algebraic Projective Geometry, Oxf.Univ.Press, (1952)