3D-2

ニューラルネットワークを利用したポートフォリオセレクションモデル －原理と構造－

泉　寛幸*　佐藤　秀樹*　浜屋　敏**　宇梶　町子**　関　順二**
*㈱富士通研究所　**㈱富士通システム総研

1. はじめに

証券市場の発展とともに，証券投資のリスクを低減しつつ利益をあげるため，最適な証券の組み合わせを決定する様々な手法が求められてきている．

マルコビッツ［1］は，二次計画法（ＱＰ法）を利用したモデルによって，証券の組み合わせを最適化する問題を定式化した．このマルコビッツモデルを実務に適用するためには，ＱＰ法に伴う幾つかの問題点を解決する必要性がある［３］．

我々は，相互結合型ニューラルネットワークによる最適化問題の近似解法［２］の考えをもとに，マルコビッツモデルの理論的な整合性を残したまま，適切な証券の組み合わせを決定するモデルを開発した．そして実験によりその実用可能性について調べてきた．

ここでは，本モデルの原理と構造について述べる．実験結果と実務への適用可能性については文献［３］にて報告する．

2. ポートフォリオ最適化問題

債券や株等の銘柄への証券投資において，投資収益率の変動による危険を避けるために適当に資金を分散させた状態を一般にポートフォリオと呼ぶ．

ポートフォリオセレクションとは，利益をできるだけ大きくしながら，かつ危険率ができるだけ少なくなるような資金配分比を求める最適化問題である．

以下，マルコビッツモデルを基にして，この最適化問題を形式的に定義する．

Ｎ個の証券銘柄について考えるものとする．各銘柄 i $(1 \leqq i \leqq N)$への資金配分比率を変数 X_i とおく．このとき各 i に対して $0 \leqq Xi \leqq 1$ であり，また $\Sigma_{i=1}^{N} Xi = 1$ である．

銘柄 i の過去の投資収益率の，平均値を P_i，標準偏差を S_i とする．銘柄 i と銘柄 j との投資収益率の相関係数を R_{ij} とする．

ここで，リターンＰを，$P = \Sigma_{i=1}^{N} P_i X_i$ とおく．これは，Ｎ個の銘柄にそれぞれ X_i の比率で資金を配分したときに期待される総利益である．さらに，リスクＲを，$R = \Sigma_{i=1}^{N} \Sigma_{j=1}^{N} S_i S_j R_{ij} X_i X_j$ とおき，投資収益率の変動による危険率を表す．

本報告では，もっとも一般的な，リターン一定時のリスク最小化のポートフォリオセレクションについて検討する．すなわち

『制約 $0 \leqq X_i \leqq 1$，$\Sigma_{i=1}^{N} X_i = 1.0$，$\Sigma_{i=1}^{N} PiXi = P$ のもとで，
目的関数 $R = \Sigma_{i=1}^{N} \Sigma_{j=1}^{N} S_i S_j R_{ij} X_i X_j$ を最小にする資金配分比 $X_1, X_2, .., X_N$ を求めよ．』

3. モデル開発の目標

相互結合型ネットワークにより，ポートフォリオ最適化問題を解くために，次の点を考慮してモデルの開発を行った．

(1) ＱＰ法では計算機の記憶領域を過大に使うため，大規模の銘柄数に対応できない［３］．それゆえ銘柄数が増えても，モデルの規模が過大にならないことをめざした．

(2) 通常のニューラルネットワークは，0,1 の二値を扱う形式で研究されており，このままでは，実数値の資金配分比を扱いにくい．従って，資金配分比が素直にネットワーク上に表現されるモデルを開発する．

(3) 従来のＱＰ法等では，実務上必要な整数条件等の制約を取り込めない．そこで，各種制約条件の追加が容易にできる可能性も考慮した．

4. ニューラルネットワーク

我々が用いた相互結合型のニューラルネットワークとは，次のような構造を持つネットワークである．

① 複数個のノードがあり，すべてのノードが他のノード（自分自身も含む）と重み付きの有向リンクで結合している．ノード j からノード i に到るリンクの重みは w_{ij} で表現される．

② ノード i は値としての変数 X_i と，閾値と呼ぶ定数 θ_i を持つ．

③ t+1時点のノード i の値 X_i は，次の値変化規則により定められる．

$$Xi(t+1) = f(\Sigma_{j=1}^{N} w_{ij} X_j(t) - \theta_i)$$

ここで，f( )は適当な一引数関数である．

5. モデル構成

ポートフォリオ最適化問題を解く相互結合型ネットワークを，下記のように構成する．

5.1. ネットワークの構造

① Ｎ個の各銘柄を各ノードに対応づける．解となる

Portfolio optimization using neural networks --principles and structures--
Hiroyuki Izumi and Hideki Sato : 1)
Satoshi Hamaya, Machiko Ukaji and Junji Seki : 2)
1)Fujitsu Laboratories Ltd., 2)Fujitsu Research Institute.

銘柄の資金配分比（$0 \leqq X_i \leqq 1$）はノードの値で表現される.

② 制約と目的関数とは，まとめて一つのエネルギー関数E_0で表現された後，ネットワークのすべてのリンクの重みと閾値に分散表現される.

エネルギー関数E_0は，その関数値が極小値になったとき，各制約式が満足されて目的関数が極小値をとるように定める.

③ 各ノードの値X_iを変化させる値変化規則は，上記のエネルギーE_0が減少するように定義される.

5.2. 制約と目的関数のエネルギー表現

目的関数を表すエネルギー関数E_1は，極小になったとき，期待されるリスクも極小になることが望ましい．そこでE_1はリスクを表す式そのものを用いる．従って，$E_1 = \Sigma\Sigma S_i S_j R_{ij} X_i X_j$

制約「$0 \leqq X_i \leqq 1$」を表わすエネルギー関数E_2は，それが極小値に近づくと各X_iとも$0 \leqq X_i \leqq 1$を満たすような表現でなければならない．例えば，次のような式である.

$$E_2 = \Sigma((1-X_i)^2 + X_i^2)$$

制約「$\Sigma X_i = 1.0$」を表わすエネルギー関数E_3は，極小になったとき，この制約式が満たされるような表現であるから，例えば，次のような式である.

$$E_3 = (1-\Sigma X_i)^2$$

制約「$\Sigma P_i X_i = P$」を表わすエネルギー関数E_4も，E_3と同様に次のように記述できる.

$$E_4 = (P-\Sigma P_i X_i)^2$$

我々は，目的関数と制約とのエネルギー関数を用いて，ポートフォリオ問題を次のように定式化した.

『（係数a，b，c，dを適当に定めた上で）エネルギー関数$E_0 = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$
$[= a(\Sigma\Sigma S_i S_j R_{ij} X_i X_j) + b\Sigma((1-X_i)^2 + X_i^2) + ..]$
を最小にせよ．』

5.3. リンクの重みと閾値

E_0を式変形し，ネットワークのエネルギー関数の一般形

$$E(t) = -(1/2)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} X_i(t) X_j(t) + \sum_{i=1}^{N} \theta_i X_i(t)$$

と対応づけることにより，リンクの重みw_{ij}と閾値θ_iは次のように定められる.

$w_{ij} = -2aS_iS_jR_{ij} - 4b\delta_{ij} - 2c - 2dP_i P_j$

ただし，$\delta_{ij} = 1$（$i=j$のとき）$= 0$（$i \neq j$ のとき）

$\theta_i = -2b - 2c - 2dPP_i$

5.4. ノードの値変化規則

ネットワークのエネルギー関数の一般形の式$E(t)$において，$w_{ij} = w_{ji}$を用いて $dE = E_0(t+1) - E_0(t)$ を式変形する．すると，

$\Sigma_{j=1}^{N} w_{ij} X_j - \theta_i \leqq 0$ならば，$X_i(t+1) \leqq X_i(t)$

$\Sigma_{j=1}^{N} w_{ij} X_j - \theta_i \geqq 0$ならば，$X_i(t+1) \geqq X_i(t)$

を満たすように，ノードの値$X_i(t)$を変化させれば，$dE = E_0(t+1) - E_0(t) \leqq 0$と，$E_0$が時間がたつにつれて減少していくことが示される．そこで，Aを適当な正の定数として，値変化規則を次のように定めた.

$$X_i(t+1) = X_i(t) + A\ (\Sigma_{j=1}^{N} w_{ij} X_j(t) - \theta_i)$$

5.5. ネットワークの動作

上で述べたように，ノード間のリンクの重みと閾値と，エネルギー関数と，ノードの値変化規則とを設定したものとする.

最初，各ノードの値X_iには，適当な初期値が入れられる．そして，値変化規則により各ノードの値を次々に更新していく．このとき，値変化規則の決め方により，エネルギー関数E_0は自動的に減少していく.

E_0が極小値に到達したときには，ポートフォリオ最適化問題の各制約式が満足されて目的関数E_1が極小値に近づくことが期待される．この場合，ノードの値X_iは，リスク極小時の銘柄iの最適な資金配分比の近似値となる．以上により，相互結合型のネットワークにより，最適ポートフォリオの近似解を計算することができる.

6. 評価

本モデルは，次の特徴を有する.

(1) 各ノードを一つの銘柄に対応させたため，比較的小規模のネットワークですむ.

(2) 各銘柄への資金配分比がノードの値として素直に表現される.

(3) また，不等式や整数条件等の制約等に対しても，適切なエネルギー関数と，値変化規則の設定により，本モデルに組み込める可能性を有する.

従って，本モデルは当初の目標を満たすことができた.

7. おわりに

本報告では，ポートフォリオ最適化問題を，相互結合型ネットワークにより解くモデルについて述べた.

本モデルは，小規模，資金配分比の実数表現，モデルの拡張可能性，等の目標を満たすことができた.

しかしながら，本モデルにおいて，高速化，係数a, b,c,d,A 等の値の適切な設定法，整数条件や不等式等の制約の表現法等がまだ問題として残されている.

文献

[1] Markowitz,H.: "Portfolio Selection", John Wiley & Sons, inc.(1959).

[2] J.J.Hopfield and D.W.Tank,"Neural Computation of Decisions in Optimization Problems," Biol. Cybern. 52, 141(1985).

[3] 浜屋他："ニューラルネットワークを利用したポートフォリオセレクションモデル—実験結果と実務への適用可能性—」第39回情報処理学会全国大会予稿集，掲載予定(1989).