有理関数近似による部分修正系の固有値解析

7L-3

柏木光博[*1] 平井一男[*2] 大脇信一[*2]

[*1]九州東海大学 [*2]熊本大学

1.はじめに

大型計算機の発達と共に固有値·固有ベクトルを解析するマトリックスの行列次数は大次元化している．この種の大次元の固有値問題の計算にはかなりの計算時間と記憶容量とを必要とするので，部分的修正を繰り返すことが多い最適問題等に対して有利な解析法がいくつか提案されている．

この研究は部分修正された振動系に対して誘導された固有方程式に，新しい一つの有理関数近似式を提示し，数値実験による比較により，修正部次数が小さく，また求める固有値の少ない場合について本式は有用であることを述べる．

2.部分修正基本式

対称，正定値係数マトリクスAおよびBの一部分が修正され，それぞれが$A+\Delta A$, $B+\Delta B$になった時，修正前の固有モードマトリクスをΨとし，修正後の系の固有値をλ，固有ベクトルをΦとすると，修正後の固有方程式は

$$[A+\Delta A-\lambda[B+\Delta B]]\phi=0\ , \qquad (1)$$

によって得られる．ここで

$$F=[A-\lambda B]\phi=-[\Delta A-\lambda\Delta B]\phi\ , \qquad (2)$$

とおくと，Fは力学的には力に関するベクトルを示しており，0要素を省いた圧縮されたベクトルを作成し得る．部分修正系の固有方程式は0要素のみの行と列を省いた圧縮されたマトリクス，ベクトル(以下バーを付ける)による以下の式

$$\overline{Q}\,\overline{F}=0\ , \qquad (3)$$

のようになる．ここに，$\bar{Q}$は

$$\overline{Q}=I+[\overline{\Delta A}-\lambda\overline{\Delta B}]\overline{f_d}\ , \qquad (4)$$

であり，f_dのi, j要素は

$$f_{d_{ij}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\Psi_{ik}\Psi_{jk}\ , \qquad (5)$$

となる．よって，式(1)の特性方程式は

$$f(\lambda)=\det\ \overline{Q}=0\ , \qquad (6)$$

のようになる．

3.有理関数近似による非線形方程式の解法

最初に，根の範囲を適切な方法により求める．その範囲内の根に対して以下の方法を考える．部分修正基本式(3)は有理関数の集合体であることを考慮すると，4個の情報を使って近似する方法は以下に示すような分子が1次で分母が2次であるような有理関数を用いることの有用性を予想させる．

$$g(\lambda)=\frac{\lambda-d}{a\lambda^2+b\lambda+c}, \qquad (7)$$

上式は，未知数が4個で，領域の両端の関数値と微分値を与えることにより

$$\lambda_l^2 f_l a+\lambda_l f_l b+f_l c+d=\lambda_l, \qquad (8)$$

$$\lambda_r^2 f_r a+\lambda_r f_r b+f_r c+d=\lambda_r, \qquad (9)$$

$$(2\lambda_l f_l+\lambda_l^2 f_l')a+(f_l+\lambda_l f_l')b+f_l'c=1, \qquad (10)$$

$$(2\lambda_r f_r+\lambda_r^2 f_r')a+(f_r+\lambda_r f_r')b+f_r'c=1, \qquad (11)$$

のような4元連立一次方程式を得る．ここ

A numerical method for eigensolutions of locally modified systems by a rational function approximation

Mitsuhiro Kashiwagi : *Kyushu Tokai University*
Itio Hirai , Shin-ichi Ohwaki : *Kumamoto University*

に，λ_l，λ_rはそれぞれ左，右端の変数を，f_l，f_rは左，右端の関数値を，f'_l，f'_rはそれぞれ左，右端の関数の微分値を表す．

式(8)〜(11)の連立一次方程式の未知数a，b，c，dを決定することにより，ある段階での近似関数$g(\lambda)$を得ることができる．この$g(\lambda)$すなわち式(7)を微係数を用いるニュートン・ラフソン系の解法によってある繰りかえし段階での固有値を得るが，この近似解が当該領域の外で求まる場合には二分法を利用する．そして，近似固有値λ_cに対応する$f(\lambda_c)$を求め，$f(\lambda_l)$と$f(\lambda_c)$あるいは$f(\lambda_c)$と$f(\lambda_r)$の符号の変化を調べることにより，変化する側に領域を狭めていく．

以上のような操作を繰り返し，$f(\lambda_c)$の絶対値あるいはλの前の近似解との差の絶対値がある収束値以下になった時収束したものとし，その時点のλ_cをその領域の固有値とする．

4. 数値計算例

部分修正系の固有値解析法について長方形平面骨組を例にとり数値解析する．

図1〜2は，修正部次数$m=3$および6のそれぞれについて，総次数nと小さい方から50個の固有値を求める平均計算時間との関係を示している．$n=150$の場合，$m=3$の有理関数近似法についてはハウスホルダー二分法，二分法の解析結果より遅いが，その他は早い．$n=300$および$n=450$の場合，平均時間で見ると，ハウスホルダー二分法より早くなっている．また，二分法は有理関数近似法より$m=3$の場合約3倍，$m=6$の場合約3.3倍かかっている．同一のnにおける$m=3$より$m=6$の増加に対しては，3者共ほとんど同様であり，有理関数近似法の場合約3.6倍，二分法の場合約3.9倍となっている．このことはmが増える，つまり修正部の次数が増加するとf_dの計算に時間を費やすことを示しており，修正部次数は小なることを前提にした解法といえよう．

図3〜4は，図1〜2の総次数450の場合について，20通りの修正パラメータα(α=0は修正前の系を,α=−1はある要素を除くことを表す)と演算時間との関係を示す．

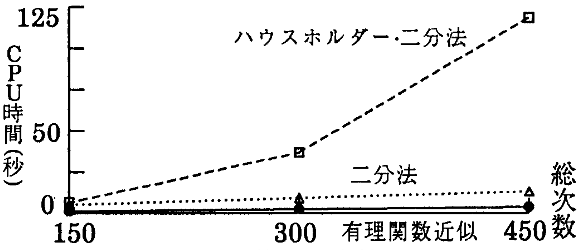

図1. 修正部次数3

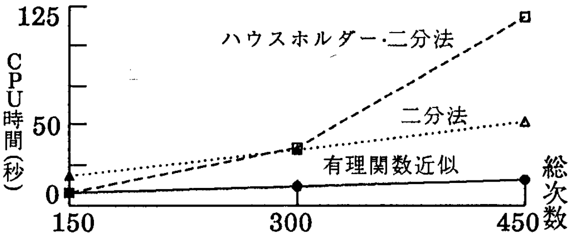

図2. 修正部次数6

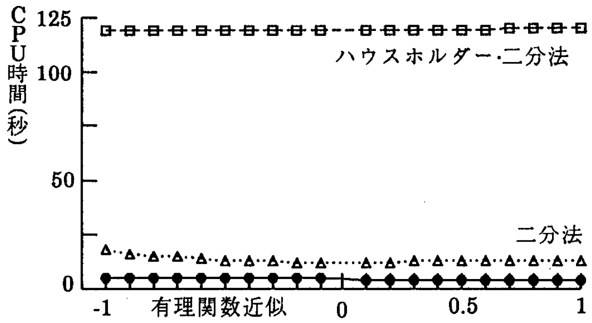

図3. 450元，修正部次数3

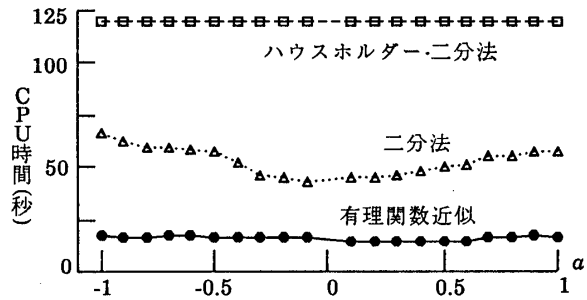

図4. 450元，修正次数6

参考文献

1) Hirai,I.,Yoshimura,T. and Takamura,K. : *On a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures*, **International Journal for Numerical Method in Engineering**, Vol.6, pp.441〜442(1973).