3次元空間に与えられた2点集合間のマッチングについて

3L-7

炭野重雄　　今井 浩
九州大学 工学部

1. まえがき

画像理解，画像認識，ロボットビジョンなどで，カメラから得られた2つのシーン間のマッチングを求めることは，画像がどのような物体を表しているか，カメラがどんな速度で移動しているか，などを求める際の重要な問題とされている．このマッチングの対象となる2つのシーンを点集合にモデル化した問題は，点パターンマッチングという名で研究されているが，多くの場合マッチングの度合の定義に最小自乗法（対応が得られた2点間のEuclid距離の2乗の総和を最小）を用いている[3,6].

しかし，自動実装における産業部品の位置決めの様な許容誤差を持つ場合に最小自乗法のマッチングを適用すると，実際の距離ではなく最小自乗距離でマッチングが求まってしまう．そのため，実際の距離が許容誤差以内であるのにマッチング不可の場合や，許容誤差以上であるのにマッチングするといったような不都合が生じる可能性がある．著者らは，ミニマックス近似の観点から距離の最大値を最小にすることでマッチングを定義し，2次元平面上に存在する，対応が与えられた2つのn点集合間のマッチングが $O(n^2)$ の手間で解けることを示した[2]．この方法では実際の距離を用いているため，上記のような不都合は起こらない．但し，効率の点とアルゴリズムの実現性を考慮して，距離には Euclid距離ではなく，距離の座標成分の最大値をとる L_∞ 距離を用いている．

本稿では，点集合が3次元空間内に存在する場合に対して，[2]のアルゴリズムの概念を拡張することを考える．3次元空間上に存在する，対応を与えられた2つのn点集合のマッチングが，平行移動・回転移動を用いる場合が $O(n^2 \log n + K)$ の手間で，平行移動・拡大縮小を用いる場合が $O(n)$ の手間で求められることを示す．但し，最悪の場合 $K = O(n^4)$ となる．

2. 問題の定式化

対応が与えられた2つのn点集合を $P = \{\mathbf{p}_i = [x_i, y_i, z_i]^T\}_{i=1,\ldots,n}$, $Q = \{\mathbf{q}_i = [u_i, v_i, w_i]^T\}_{i=1,\ldots,n}$（同じ添え字が対応する2点を表す），平行移動を表すベクトルを $\mathbf{t} = [a, b, c]^T$, 3次元の回転移動を表す3×3行列を $R(\theta, \phi) = [r_{kh}]$，拡大縮小係数を δ (>0) とする．またマッチングの定義を，[2]と同様に対応する2点間の距離の最大値を，一方を平行移動・回転移動・拡大縮小して最小化することとする．ここで，拡大縮小は2点集合間で相対的なので便宜上，点集合Pを平行移動・回転移動，Qを拡大縮小し，距離の最大値を最小化する．距離の定義はEuclid距離ではなく，座標成分の最大値をとる L_∞ 距離を用いる．

よって，PとQの対応する2点間の距離を表すベクトル $\mathbf{d}(\theta, \phi, \delta, \mathbf{t})$ は，Pに回転移動・平行移動を施した $R(\theta, \phi)\mathbf{p}_i - \mathbf{t}$ と，Qに拡大縮小を施した $\delta \mathbf{q}_i$ の差をとり，次式のようになる．

$$\mathbf{d}(\theta, \phi, \delta, \mathbf{t}) = R(\theta, \phi)\mathbf{p}_i - \mathbf{t} - \delta \mathbf{q}_i$$

上式の各成分を比較すると，2点間の距離の最大値 $f(\theta, \phi, \delta, \mathbf{t})$ は次のように表せる．

$$f(\theta, \phi, \delta, \mathbf{t}) = \max_{i=1,\ldots,n} \{ |X_i(\theta, \phi, \delta) - a|, |Y_i(\theta, \phi, \delta) - b|, |Z_i(\theta, \phi, \delta) - c| \}$$

(但し，

$$X_i(\theta, \phi, \delta) = r_{11}x_i + r_{12}y_i + r_{13}z_i - \delta u_i \quad \cdots ①,$$
$$Y_i(\theta, \phi, \delta) = r_{21}x_i + r_{22}y_i + r_{23}z_i - \delta v_i,$$
$$Z_i(\theta, \phi, \delta) = r_{31}x_i + r_{32}y_i + r_{33}z_i - \delta w_i,$$
$$\sum_{h=1}^{3} r_{kh}^2 = 1 \quad (k=1,2,3) \quad \cdots ②)$$

いま，Rと δ を固定して考えると，$a = (X_{max} + X_{min})/2$, $b = (Y_{max} + Y_{min})/2$, $c = (Z_{max} + Z_{min})/2$ としたとき，fは最小値 $g(\theta, \phi, \delta)$ をとる．

$$g(\theta, \phi, \delta) = \max \{X_{max} - X_{min}, Y_{max} - Y_{min}, Z_{max} - Z_{min}\} / 2 \quad \cdots ③$$

(但し，
$$X_{max}(\theta, \phi, \delta) \equiv \max_{i=1,\ldots,n} \{X_i(\theta, \phi, \delta)\} \cdots ④,$$
$$X_{min}(\theta, \phi, \delta) \equiv \min_{i=1,\ldots,n} \{X_i(\theta, \phi, \delta)\},$$
$$Y_{max}(\theta, \phi, \delta) \equiv \max_{i=1,\ldots,n} \{Y_i(\theta, \phi, \delta)\},$$
$$Y_{min}(\theta, \phi, \delta) \equiv \min_{i=1,\ldots,n} \{Y_i(\theta, \phi, \delta)\},$$
$$Z_{max}(\theta, \phi, \delta) \equiv \max_{i=1,\ldots,n} \{Z_i(\theta, \phi, \delta)\},$$
$$Z_{min}(\theta, \phi, \delta) \equiv \min_{i=1,\ldots,n} \{Z_i(\theta, \phi, \delta)\} \quad)$$

求めるマッチングは，上記のgを θ, ϕ, δ に関して最小化することであり，次式で表せる．

$$\underset{\theta, \phi, \delta}{\text{minimize}} \quad g(\theta, \phi, \delta) \quad \cdots ⑤$$

3. 2点集合間のマッチングを求めるアルゴリズム

2章で定式化した結果に対して，2点集合を回転移動・平行移動してマッチングする場合と平行移動・拡大縮小してマッチングする場合について場合分けして考察する．言い替えると δ を定数とした場合とRの各成分を定数とした場合を考察する．

3.1 平行移動・回転移動を用いてマッチングする場合

本節では，2点集合を回転移動・平行移動してマッチングする場合，すなわち δ が定数の場合について検討する．

始めに，式④の $X_{max}(\theta, \phi, \delta)$ について考える．δ は定数であるから関数 X_{max} は，2変数関数の最大値を取るDavenport-Schinzel列とみなせ[1]，2次元平面を曲線で分割したある部分領域と，その部分領域では他のどの関数より大きい値を与えるある一つの関数との対の集合で表される．この部分領域の境界値のグラフは最大値図（但し，X_{min} の場合は最小値図）と呼ばれていて，式④は次式と同値になる．

Minimax Fitting Algorithm of Two Corresponding Sets of Points in Three Dimensional Space
Shigeo Sumino and Hiroshi Imai
Faculty of Engineering, Kyushu University

$$\underset{\theta,\phi}{\text{maximize}}\quad x_i r_{11}+y_i r_{12}+z_i r_{13}-u_i\delta \quad \cdots ⑤$$

$$\text{subject to}\quad r_{11}^2+r_{12}^2+r_{13}^2=1 \quad \cdots ⑥$$

式⑤は，n個の4次元半空間の共通部分を求める問題とみなせるので，双対変換を用いてn点集合 $\{(x_i, y_i, z_i, -\delta u_i)\}$ に対する4次元凸包を求めることに帰着される．n点の凸包を求める手間は $O(n^2)$，凸包に関与する点，辺，平面，3次元平面の数は高々 $O(n^2)$ 個ずつであることが知られている．式⑥の拘束条件を考えると，関数 X_{max} を求める手間は $O(n^2)$，関与する交点，曲線，部分領域の数（ファセット数）は $O(n^2)$ である．但し，求められたのは r_{11}, r_{12}, r_{13} をパラメタとして X_{max} を表したものであるで，Y_{max} などの他の5関数と協調させるため，θ と ϕ をパラメタとして変換する必要がある．この変換する手間がnに無関係な定数の手間で求められるとすると，X_{max} は $O(n^2)$ の手間で求められる．同様にして，Y_{max} などの5関数も $O(n^2)$ の手間で求められる．

式⑤から，θ と ϕ の定義域内の任意の値の組 (θ_0, ϕ_0) に対して，X_{max} など6関数に各々対応する6つの関数は一意に定めることができる．よって，X_{max} など6関数を表す相異なる6つの最大･最小値図を重ね合わせて更に細分化された部分領域を求め，その各部分領域に対応する関数を，6つの最大･最小値図と式⑤から決定すれば関数gを求めることができる．

X_{max} など6関数に関して，部分領域の境界数は各々 $O(n^2)$ 本，全体として $O(n^2)$ 本の境界が存在する．また，その境界は ϕ 軸に関して区分的に単調であり，かつ各最大･最小値図において交点を除いて考えれば境界は交わることはない．この様な条件の場合，[4]に示されている交差列挙問題が適用でき，関数gの部分領域の境界は $O(n^2 \log n + K)$ の手間で求められ（ただし，Kは交差する境界の対），部分領域の数は $O(n^2 + K)$ になる．しかし，最悪の場合 $K=O(n^4)$ である．

関数gの各部分領域に対応する関数は，定数の手間で求めることができ，その関数の最小化も θ と ϕ に関して偏微分すれば求めることができるので，この操作も定数の手間でできる．関数gの最小値は各部分領域に関して最小化した値のうち最も小さいものであるので，部分領域の総数の手間すなわち $O(n^2 + K)$ の手間で求めることができる．

以上より次の定理が成り立つ．

【定理1】 3次元空間上に存在する，対応を与えられた2つのn点集合において，平行移動・回転移動を用いてマッチングする場合の手間は，$O(n^2 \log n + K)$ になる．但し，最悪の場合 $K=O(n^4)$．□

3.2 平行移動・拡大縮小を用いてマッチングする場合

次に，平行移動・拡大縮小を用いてマッチングする場合，すなわちRの各成分が定数の場合を考察する．

Rの各成分が定数であるので式④より，式⑤は以下の式と同値である．

$$\min_{\delta}\ \max\ [\max_{i=1,\dots,n}\{-u_i\delta+D_i\} - \min_{i=1,\dots,n}\{-u_i\delta+D_i\},\ \max_{i=1,\dots,n}\{-v_i\delta+E_i\} - \min_{i=1,\dots,n}\{-v_i\delta+E_i\},\ \max_{i=1,\dots,n}\{-w_i\delta+F_i\} - \min_{i=1,\dots,n}\{-w_i\delta+F_i\}]$$

$$(\text{但し，}D_i=x_i r_{11}+y_i r_{12}+z_i r_{13},\ E_i=x_i r_{21}+y_i r_{22}+z_i r_{23},\ F_i=x_i r_{31}+y_i r_{32}+z_i r_{33})$$

また，更に変形すると次式のようになり，6つの1変数線形計画問題を組み合わせたものになる．

$$\min_{\delta}\ \max_{i,j,k,h,r,s}\ [-(u_i-u_j)\delta+(D_i-D_j),\ -(v_k-v_h)\delta+(E_k-E_h),\ -(w_r-w_s)\delta+(F_r-F_s)]$$

上式は，n個の1変数関数からi, j, k, h, r, sを各々表す関数を求めることになるので，1変数線形計画問題を解く場合のpruningの手法[5]を多少変形するだけで求めることができる．あらかじめ関数のリストを6つ用意して，各添え字に対応させておく．次に，各々のリストに対して関数の対を決定し，そのn/2個の交点を求める．3n個の値の中間値において，iとj，kとh，rとsを表す関数を決定し各々の対の差を取る．3つの差の最大値を与える関数の対の傾きにより，冗長な(3n)/2個の関数を6つのリストから削除する．同様な操作を(9n)/2個の関数に対して繰り返し，解を求める．

以上の操作は，線形時間で行うことができるので，次の定理が成り立つ．

【定理2】 3次元空間上に存在する，対応を与えられた2つのn点集合において，平行移動・拡大縮小を用いてマッチングする場合の手間は，$O(n)$ になる．□

4. むすび

3次元空間上に，対応が与えられた2点集合が存在したとき，平行移動・回転移動を用いてマッチングする場合と平行移動・拡大縮小を用いる場合について考察した．

今後の課題としては，平行移動・回転移動・拡大縮小を考慮する場合，点集合間に対応が与えられていない場合，考察する点集合が3次元以上の高次元に存在する場合などが挙げられる．

参考文献

[1] H. Edelsbrunner, J. Pach, J. T. Schwartz and M. Sharir: On the Lower Envelope of Bivarite Functions and Its Applications. Proceedings of the 28th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 27-37.

[2] K. Imai, S. Sumino and H. Imai: Minimax Geometric Fitting of Two Corresponding Sets of Points. ACM 5th Annual Computational Geometry Conference, pp. 266-275(1989).

[3] D. Kahl, A. Rosenfld and A. Danker: Some Experiments in Pattern Matching. IEEE Trans. Syst. Man. and Cybern., Vol. SMC-10, pp. 105-116(1980).

[4] H. G. Mairson and J. Stolfi: Reporting and Counting Intersections Between Two Sets of Line Segments. Noto Adv. Study Inst. on Theoretical Foundations of Computer Graphics and CAD, July 1987, Lucca, Italy.

[5] N. Megiddo : Linear-Time Algorithms for Linear Programming in R^3 and Related Problems. SIAM Journal on Computing, Vol. 12, No. 4, pp. 759-776 (1983).

[6] 梅山伸二：点パターンマッチングアルゴリズム．電子情報通信学会論文誌，Vol. J72-D-II, No. 2, pp. 218-228 (1989).