ファジィインターバル論理におけるシャノン展開

2L-8

菊池　浩明　　向殿　政男

明治大学　　理工学部

1．はじめに

我々の日常のあいまいな論理構造を取り扱う論理体系にファジィ論理がある．そこに，真偽のあいまいさだけではなく，未知や矛盾に関するあいまいさを導入した論理体系＝**ファジィインターバル論理**[1]が提案されている．ここでは，ファジィ論理で用いられていた[0,1]上の数値の代わりに，区間[n,p]で真理値を取る．未知の度合はその閉区間の幅で，矛盾の度合は相当するファジィ集合の高さで表現される．「かつ」や「または」に相当する論理演算は，特殊な場合にファジィ論理を含む形で拡張されており，その代数系はドモルガン代数となることが知られている．また，それらの論理演算で構成される論理関数の数は有限であることも明らかにされている．

本稿では，ファジィインターバル論理における論理関数の表現について議論する．そのために，２値論理で言うところのシャノン展開をファジィインターバル論理に拡張する．

2．ファジィインターバル論理

区間真理値は次のように定義される集合Ｉの元である．

$$I=\{[n,p]\mid n,p\in[0,1]\}$$

そして，そこに，２種類の半順序関係を定義する．

[定義]

区間真理値x=[Nx,Px], y=[Ny,Py]について，

(真偽の半順序関係)　$x\supset y$ iff $Nx\geq Ny, Px\geq Py$.

(あいまいさの半順序関係)　$x\succ y$ iff $Nx\geq Ny, Py\geq Px$.

これらの順序関係の最大元，最小元となる区間真理値を次に示すシンボルで記す．

[1,1]=**1**,　[0,0]=**0**,　[0,1]=**U**,　[1,0]=**C**

集合Ｉを，これらの半順序関係に基づいて，無限濃度のハッセ図（図１）で表現する．ここで，任意の区間真理値は図の上の１点として表されている．これから，任意の二つの区間真理値は，必ず真偽かあいまいさかのどちらかの半順序関係にあるということが明らかである．

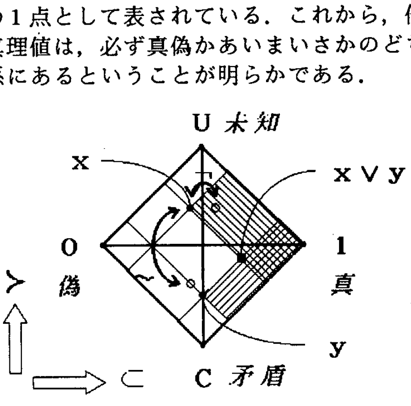

図１．区間真理値のハッセ図

3．論理関数

真偽に関する半順序関係の上限，下限として**論理和**(∨)，**論理積**(･)が，あいまいさの半順序関係から**あいまい和**(⋎)，**あいまい積**(⋏)が，また，それぞれを互いに相補に持つように**論理否定**(¬)，**あいまい否定**(～)が，それぞれ以下のように定義できる．（図１参照）

[定義]x=[nx,px], y=[ny,py]とする．

$$x\vee y=[\max(nx,ny),\ \max(px,py)]$$
$$x\cdot y=[\min(nx,ny),\ \min(px,py)]$$
$$x\curlyvee y=[\min(nx,ny),\ \max(px,py)]$$
$$x\curlywedge y=[\max(nx,ny),\ \min(px,py)]$$
$$\neg x=[1-px,1-nx]$$
$$\sim x=[px,nx]$$

ただし,明らかな場合には，x・yをxyで，¬xを$\bar{x}$で表す．

ファジィインターバル論理関数（以後，ＦＩ論理関数）とは，Ｉの元をとる変数ｘｉ（i=1,…,n）と論理演算∨，∧，¬との有限回の結合により構成される論理式が表現する，I^nからＩへの写像を行う関数である．

［例］次の２変数のＦＩ論理関数Fに対して，

$$F(x,y)=xy\vee\bar{x}\bar{y}$$

I^2の元 X=([0.2,0.6],[0.5,1])を入力する．

$$F(X)=[0.2,0.6][0.5,1]\vee[0.6,0.8][0.2,0.6][1,0.5]$$
$$=[0.2,0.6]\vee[0.2,0.5]$$
$$=[0.2,0.6]$$

ファジィ論理と同様に以下の等式が成立する．

べき等律　$x\vee x=x,\quad xx=x$　／$x\curlyvee x=x,\quad x\curlywedge x=x$

交換律　$x\vee y=y\vee x, xy=yx$　／$x\curlyvee y=y\curlyvee x,\ x\curlywedge y=y\curlywedge x$

結合律　$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$／$(x\curlyvee y)\curlyvee z=x\curlyvee(y\curlyvee z)$

吸収律　$x\vee xy=x,\quad x(x\vee y)=x$／$x\curlyvee x\curlywedge y=x,\ x\curlywedge(x\curlyvee y)=x$

分配律　$(x\vee y)z=xy\vee xy$　／$(x\curlyvee y)\curlywedge z=x\curlywedge z\curlyvee y\curlywedge z$

復帰律　$\neg\neg x=x$　／$\sim\sim x=x$

最大元　$x\vee \mathbf{1}=\mathbf{1},\quad x\mathbf{1}=x$　／$x\curlyvee \mathbf{U}=\mathbf{U},\quad x\curlywedge \mathbf{U}=x$

最小元　$x\vee \mathbf{0}=x,\quad x\mathbf{0}=\mathbf{0}$　／$x\curlyvee \mathbf{C}=x,\quad x\curlywedge \mathbf{C}=\mathbf{C}$

ﾄﾞﾓﾙｶﾞﾝ律　$\neg(x\vee y)=\neg x\neg y$　／$\sim(x\curlyvee y)=\sim x\curlywedge\sim y$

しかし，ファジィ論理では成立するクリーネ律はここでは一般でない．成立するための必要十分条件を次に示す．

[定理１][1]

x,yをIの元とする．**クリーネ律**,

$$(x\vee\neg x)\vee(y\neg y)=x\vee\neg x,\qquad (x\vee\neg x)(y\neg y)=y\neg y$$

が成立するのは,

$x\supset y$または$y\supset x$（真偽の半順序関係にある）

なるとき及びその時に限る．　　　　　　　　　（証明略）

ファジィ論理関数の加法標準型は，クリーネ律を適用して相補最小項（全ての変数が現れるような相補項）へ展開することで一意的に定まっていた．しかし，定理１が示す様に，ＦＩ論理関数においては相補最小項に展開することは許されない．これは，ＦＩ論理関数の標準型が，加法形式に展開した後，吸収律を適用するだけで一意に定まることを意味している．

［例］次の２変数の論理関数FとGはファジィ論理においては同値である．（括弧内にクリーネ律で展開する）

Shannon expansion in Fuzzy Interval Logic
Hiroaki Kikuchi, Masao Mukaidono
School of Science and Technology, Meiji University

$F(x,y)=xy \vee x\overline{xy}$

$G(x,y)=xy \vee x\bar{x}(=xy \vee x\bar{x}(y \vee \bar{y})=xy \vee \bar{x}xy \vee \bar{x}x\bar{y}=F(x,y))$

しかし，ファジィインターバル論理においては，これらは異なった論理関数である．例えば$(x,y)=(\mathbf{U},\mathbf{C})$を入力すると，

$F(\mathbf{U},\mathbf{C})=\mathbf{UC} \vee \mathbf{UUC}=\mathbf{0} \vee \mathbf{0}=\mathbf{0}$

$G(\mathbf{U},\mathbf{C})=\mathbf{UC} \vee \mathbf{UU}=\mathbf{U} \neq F(\mathbf{U},\mathbf{C})$

論理演算$(\vee, \cdot, \neg)$とあいまい演算$(\curlyvee, \curlywedge, \neg)$との間に，次の関係がある．

[補題1]（分配性）

任意の区間真理値x,y,zについて，

$(x \vee y) \curlyvee z=(x \curlyvee z) \vee (y \curlyvee z)$　$(xy) \curlyvee z=(x \curlyvee z)(y \curlyvee z)$

$(x \curlyvee y) \vee z=(x \vee z) \curlyvee (y \vee z)$　$(x \curlywedge y) \vee z=(x \vee z) \curlywedge (y \vee z)$

[補題2]（否定に関する分配性）

$\neg(x \curlyvee y)=(\neg x) \curlyvee (\neg y)$　$\neg(x \curlywedge y)=(\neg x) \curlywedge (\neg y)$

$\sim(x \vee y)=(\sim x) \vee (\sim y)$　$\sim(xy)=(\sim x)(\sim y)$

[補題3]（否定の交換性）

$\neg \sim x=\sim \neg x$

ＦＩ論理関数の重要な性質の一つに次の単調性がある．

[定理２]（あいまいさの単調性）[1]

FをFI論理関数とする．任意の$\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{I}^n$について，

$\mathbf{a} \succ \mathbf{b} \Rightarrow F(\mathbf{a}) \succ F(\mathbf{b})$　　　　　　（証明略）

[系２] n次元ベクトル$a_1=(1,x_2,...,x_n)$, $a_0=(0,x_2,...,x_n)$, $a_U=(U,x_2,...,x_n)$, $a_C=(C,x_2,...,x_n)$について，

$a_U \succ a_1 \succ a_C$,　$a_U \succ a_0 \succ a_C$

なので，定理２より，ＦＩ論理関数Fについて次が明らか．

$F(a_1) \vee F(a_U)=F(a_U)$　　$F(a_0) \vee F(a_U)=F(a_U)$

$F(a_1) \vee F(a_C)=F(a_1)$　　$F(a_0) \vee F(a_C)=F(a_0)$

$F(a_1) \vee F(a_0)=F(a_U)$　　$F(a_C) \vee F(a_U)=F(a_U)$

ＦＩ論理関数が等しくなるための必要十分条件を示す．

[定理３][2]

ＦＩ論理関数G，Hが，全ての$x=\mathbf{I}^n$について，

$G(x)=H(x)$

となるのは，任意の$a \in \mathbf{I}_4{}^n=\{\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{U},\mathbf{C}\}^n$について

$G(a)=H(a)$

が成立する時，及びその時に限る．　　　　　（証明略）

この定理は，ＦＩ論理関数が本質的に４値であることを意味しており，このことから次のシャノン展開が導かれる．

４．シャノン展開

シャノン展開は，２値論理において任意の論理関数を一意的に表現するのに有効な定理である．これを次のように拡張する．

[定理４]

任意のＦＩ論理関数$F(X)=F(x_1,..,x_n)$は，次式で展開できる．

$f(X)=xF(\mathbf{1},Y) \vee \bar{x}F(\mathbf{0},Y) \vee$
$\quad x\bar{x}\{F(\mathbf{U},Y) \vee F(\mathbf{C},Y)\} \vee \{F(\mathbf{U},Y)F(\mathbf{C},Y)\}$

但し，ここで$F(x,Y)$は$F(x_1,..,x,..,x_n)$を表現している．

（証明）xについて次の４つの場合に分けて証明する．

(1) $x=\mathbf{1}$の時，$f(X)=F(\mathbf{1},Y) \vee F(\mathbf{U},Y)F(\mathbf{C},Y)$

ここで，$F(\mathbf{1},Y)$とあいまい和をとる．

$f(X) \curlyvee F(\mathbf{1},Y)$
$=\{F(\mathbf{1},Y) \vee F(\mathbf{U},Y)F(\mathbf{C},Y)\} \curlyvee F(\mathbf{1},Y)$
$=F(\mathbf{1},Y) \curlyvee F(\mathbf{1},Y) \vee$　　　　　；補題（分配性）
$\quad (F(\mathbf{U},Y) \curlyvee F(\mathbf{1},Y))(F(\mathbf{C},Y) \curlyvee F(\mathbf{1},Y))$
$=F(\mathbf{1},Y) \vee F(\mathbf{U},Y)F(\mathbf{1},Y)$　　　　　；系２
$=F(\mathbf{1},Y)$　　　　　；吸収律

よって，半順序であるので，$F(\mathbf{1},Y) \succ f(X)$　①

逆に，$F(\mathbf{1},Y)$とあいまい積を取って，

$f(X) \curlywedge F(\mathbf{1},Y)$
$=\{F(\mathbf{1},Y) \vee F(\mathbf{U},Y)F(\mathbf{C},Y)\} \curlywedge F(\mathbf{1},Y)$
$=F(\mathbf{1},Y) \vee (F(\mathbf{U},Y) \curlywedge F(\mathbf{1},Y))(F(\mathbf{C},Y) \curlywedge F(\mathbf{1},Y))$
$=F(\mathbf{1},Y) \vee F(\mathbf{1},Y)F(\mathbf{C},Y)$
$=F(\mathbf{1},Y)$

よって，　　　$f(X) \succ F(\mathbf{1},Y)$　　②

①，②と半順序関係の非対称律より，$f(X)=F(\mathbf{1},Y)$．

(2) $x=\mathbf{0}$の時も，(1)と同様にして，$f(X)=F(\mathbf{0},Y)$．

(3) $x=\mathbf{U}$の時，

$f(X)=\mathbf{U}F(\mathbf{1},Y) \vee \mathbf{U}F(\mathbf{0},Y) \vee \mathbf{U}\{F(\mathbf{U},Y) \vee F(\mathbf{C},Y)\}$
$\qquad \vee F(\mathbf{U},Y)F(\mathbf{C},Y)$
$=\mathbf{U}\{F(\mathbf{1},Y) \vee F(\mathbf{0},Y) \vee F(\mathbf{U},Y) \vee F(\mathbf{C},Y)\} \vee F(\mathbf{U},Y)F(\mathbf{C},Y)$

ここで，$F(U,Y)$とあいまい和を取ると，

$f(X) \curlyvee F(\mathbf{U},Y)$
$=\mathbf{U} \curlyvee F(\mathbf{U},Y)\{(F(\mathbf{1},Y) \vee F(\mathbf{0},Y) \vee F(\mathbf{U},Y) \vee F(\mathbf{C},Y))$
$\quad \curlyvee F(\mathbf{U},Y)\} \vee (F(\mathbf{U},Y) \curlyvee F(\mathbf{U},Y))(F(\mathbf{C},Y) \curlyvee F(\mathbf{U},Y))$
$=\mathbf{U}(F(\mathbf{U},Y)) \vee F(\mathbf{U},Y)F(\mathbf{U},Y)$
$=\mathbf{U}F(\mathbf{U},Y) \vee F(\mathbf{U},Y)$
$=F(\mathbf{U},Y)$

よって，　　　$F(\mathbf{U},Y) \succ f(X)$　　③

$f(X) \curlywedge F(\mathbf{U},Y)$
$=\mathbf{U} \curlywedge F(\mathbf{U},Y)\{(F(\mathbf{1},Y) \vee F(\mathbf{0},Y) \vee F(\mathbf{U},Y) \vee F(\mathbf{C},Y))$
$\quad \curlywedge F(\mathbf{U},Y)\} \vee (F(\mathbf{U},Y) \curlywedge F(\mathbf{U},Y))(F(\mathbf{C},Y) \curlywedge F(\mathbf{U},Y))$
$=F(\mathbf{U},Y)(F(\mathbf{1},Y) \vee .. \vee F(\mathbf{U},Y)) \vee F(\mathbf{U},Y)F(\mathbf{C},Y)$
$=F(\mathbf{U},Y) \vee F(\mathbf{U},Y)F(\mathbf{C},Y)$
$=F(\mathbf{U},Y)$

よって，　　　$f(X) \succ F(\mathbf{U},Y)$　　④

③，④より，　　$f(X)=F(\mathbf{U},Y)$

(4) $x=\mathbf{C}$の時も，同様に，$f(X)=F(\mathbf{C},Y)$

以上，(1)，(2)，(3)，(4)より，常に，$f(X)=F(X)$　（証明終）

［例］次の２変数のＦＩ論理関数に対して，

$F(x,y)=xy \vee \bar{x}x\bar{y} \vee y\bar{y}$

変数xについてシャノン展開する．

$f(x,y)=x(y \vee y\bar{y}) \vee \bar{x}(y\bar{y}) \vee x\bar{x}\{(\mathbf{U}y \vee \mathbf{U}\bar{y} \vee y\bar{y})$
$\quad \vee (\mathbf{C}y \vee \mathbf{C}\bar{y} \vee y\bar{y})\} \vee \mathbf{1}\{(\mathbf{U}y \vee \mathbf{U}\bar{y} \vee y\bar{y})(\mathbf{C}y \vee \mathbf{C}\bar{y} \vee y\bar{y})\}$

この式が元の$F(x,y)$に等しいことを示す．

$=xy \vee xy\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{y} \vee x\bar{x}\{(\mathbf{U} \vee \mathbf{C})y \vee (\mathbf{U} \vee \mathbf{C})\bar{y} \vee y\bar{y})\}$
$\qquad \vee \{\mathbf{UC}y \vee \mathbf{UC}\bar{y} \vee y\bar{y}\}$
$=xy \vee xy\bar{y} \vee \bar{x}x\bar{y} \vee (x\bar{x}y \vee \bar{x}x\bar{y} \vee x\bar{x}y\bar{y}) \vee (y\bar{y})$
$=xy \vee \bar{x}x\bar{y} \vee y\bar{y}$　$=F(x,y)$

５．おわりに

ファジィインターバル論理におけるシャノン展開を示した．この定理より，系として任意の４値からなる真理値表からＦＩ論理関数を表現する方法を導くことができるだろう．そして，それは知識獲得等の分野に有効でないかと我々は考える．本論文で扱った論理式の定義には，Ｉの元の定数は含まれていない．この定数を含むことや，他の論理演算を認めることが，ＦＩ論理の性質にどのように依存するかは興味深いテーマである．

参考文献

[1]菊池，向殿：ﾌｧｼﾞｨｲﾝﾀｰﾊﾞﾙ論理の提案，第4回ﾌｧｼﾞｨｼｽﾃﾑｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ講演論文集，pp.215-220(1988)

[2]菊池，向殿：ﾌｧｼﾞｨｲﾝﾀｰﾊﾞﾙ論理関数について，第5回ﾌｧｼﾞｨｼｽﾃﾑｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ講演論文集，pp.(1989)

[3]高木，向殿：正則多値関数について，多値論理及びその応用(IV)，京都大学数理解析研究所講究録，687(1989)

[4]向殿：ﾌｧｼﾞｨ論理における2，3の性質について，信学論(D)，58-D，3(昭和50-03)