

非整数次 (1/4) ベッセル関数を含む半無限区間積分の自動数値積分

蘇 峰† 長谷川 武光†

関数 $g(x)$ を無限大で振動しない関数 (一般に複素関数) で, かつ任意の大きい x に対して無限回微分可能として, 次数 ν (実数) のベッセル関数 $J_\nu(x)$ と $Y_\nu(x)$ に対して次の関係: $M(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) = e^{ix}g(x)$ を満足する関数とする. 本論文では, 関数 $M(x)$ により, 与えられた滑らかな関数 $f(t)$ とベッセル関数 $J_\nu(x)$ (特に $\nu = 1/4$) を含む半無限区間積分 $\int_0^\infty J_\nu(\omega t)f(t)dt = \Re \int_0^\infty M(\omega t)f(t)dt$ に対して効率的な自動数値積分法を提出する. この方法は自動フーリエ積分法, ベキ型の特異関数に対する積分法と無限区間の振動積分の計算としての修正 W-変換を組み合わせて構成される.

An Automatic Integration Scheme for Infinite Range Integrals Involving Bessel Functions

FENG SU† and TAKEMITSU HASEGAWA†

Let order ν (real) Bessel functions $J_\nu(x)$ and $Y_\nu(x)$ be such that $M(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) = e^{ix}g(x)$, where $g(x)$ is infinitely differentiable for all large x and is non-oscillatory at infinity. With the given appropriate expansions of $M(x)$, we develop an efficient automatic quadrature procedure for numerically computing the infinite range integrals of the form $\int_0^\infty J_\nu(\omega x)f(t)dt$ ($\nu = 1/4$), where the function $f(t)$ is smooth and non-oscillatory at infinity. The procedure involves automatic schemes used for Fourier integrals and for the product type integration and the modified W-transformation due to Sidi used for computing oscillatory infinite integrals.

1. はじめに

本論文では, ベッセル関数を含む積分の自動数値積分法を提案する.

応用上, 重要である Hankel 変換型積分

$$H_\nu[f; \omega] = \int_0^\infty t J_\nu(\omega t) f(t) dt, \quad (1)$$

はベッセル関数を含む積分であって, その数値積分は, Linz¹⁾, Longman²⁾, Sidi³⁾, Piessens⁴⁾, 緒方⁵⁾等の論文に説明があるが, 自動的な数値積分法はほとんど見当たらない. 最近, 無限区間上の振動関数の自動数値積分法⁶⁾が Hasegawa and Sidi により提案されて, 整数次 n (特に, 0 次と 1 次) のベッセル関数 $J_n(\omega t)$ を含む半無限区間の数値積分が効率的に計算できることが示された. 本研究では, この積分法に基づいて, 実数 ν の場合 (特に, $\nu = 1/4$) のベッセル関数 $J_\nu(\omega t)$ を含む積分の自動積分法について展開する.

次数 ν (実数) のベッセル関数 $J_\nu(x)$ と $Y_\nu(x)$ で

次の関係:

$$M(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) = e^{ix}g(x), \quad (2)$$

を満たす関数 $g(x)$ を構成できる. ここで, $g(x)$ は任意の大きな x に対して無限回微分可能で, 無限区間で振動しない複素関数とする. 本論文では, 上の関係を利用して,

$$\int_0^\infty J_\nu(\omega t)f(t)dt, \quad \int_0^\infty Y_\nu(\omega t)f(t)dt, \quad \omega > 0,$$

の半無限区間でのベッセル関数を含む積分を求める効率的な自動積分法を導入して解説する. ここで, $f(t)$ は滑らかな実数関数と仮定する. 本方法は, Hasegawa and Torii の振動積分 $\int_0^\infty e^{i\omega t}f(t)dt$ に対する自動フーリエ積分法⁷⁾, 加速法としての Sidi の修正 W 変換法⁸⁾ および長谷川と鳥居の特異関数に対する自動積分法⁹⁾ の 3 つの方法を組み合わせて構成されている. それについて後で詳しく説明するが, ここでは本論文の構成を簡単に述べる. 2 章で関係式 $M(x)$ により積分を 2 つの部分に分けて, 各部分に対する積分を解説する. 続いて 3, 4 章では, 積分の加速と自動フーリエ積分の具体的な応用について述べる. 積分法の誤差評価を

† 福井大学
Fukui University

5章で与える．自動積分としての停止則を6章で述べる．最後に，7章では，数値実験の結果と分析をまとめる．

2. 積分法の記述

本文では積分

$$Q(\omega) = \int_0^\infty J_\nu(\omega t) f(t) dt, \quad (3)$$

を考える．ここで， $f(t)$ が実数関数とすると，式 (2) によって上の積分は

$$Q(\omega) = \Re \int_0^\infty M(\omega t) f(t) dt, \quad (4)$$

になって実数部分を求めることになる．特に $\nu = 1/4$ のベッセル関数 $J_\nu(x)$ と $Y_\nu(x)$ に対して，Luke¹⁰⁾ は次のチェビシェフ展開

$$J_{\frac{1}{4}}(x) = x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^\infty A_n T_{2n}\left(\frac{x}{8}\right), \quad -8 \leq x \leq 8, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{4}}(x) + iY_{\frac{1}{4}}(x) &= e^{ix} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{(-3\pi/8)i} \sum_{n=0}^\infty b_n T_n^*\left(\frac{5}{x}\right), \\ &\quad x \geq 5, \end{aligned} \quad (6)$$

を与えている．ここで， $T_k(x)$ と $T_k^*(x)$ は各々次数 k のチェビシェフ多項式およびずらしチェビシェフ多項式である．展開係数 A_n ($n = 0, 1, \dots, 16, 17$) と b_n ($n = 0, 1, \dots, 20, 21$) の値 (20桁) が Luke¹⁰⁾ [p.342] の表によって与えられている．これによって，積分 (4) を2つの部分

$$Q(\omega) = Q_1(\omega) + Q_2(\omega), \quad (7)$$

に分割する．ここで

$$Q_1(\omega) = \int_0^{c/\omega} J_{\frac{1}{4}}(\omega t) f(t) dt, \quad (8)$$

$$Q_2(\omega) = \Re \int_{c/\omega}^\infty M(\omega t) f(t) dt, \quad (9)$$

で，2つの積分のそれぞれの区間 $[0, c/\omega]$ と $[c/\omega, \infty]$ として， c の値により決める．展開式 (5)，(6) に従って，式 (6) (振動関数) をより広い区間で使いたいのて $c = 5$ とおく．

2.1 $Q_1(\omega)$ の計算

$Q_1(\omega)$ (8) の計算では式 (5) を使う．区間 $[0, c/\omega]$ で $f(t)$ が滑らかであるが， $J_{1/4}(\omega t)$ のチェビシェフ展開式 (5) にかかる $x^{1/4}$ 項は原点の近くで急激に変化するため， c/ω と比べて十分小さい x に対して，積分 $\int_0^x J_{1/4}(\omega t) f(t) dt$ は普通の数値積分法ならば困難になる．そのため， $c/\omega \leq 1.0$ の場合では，

長谷川と鳥居のチェビシェフ展開を利用したべき型自動積分法⁹⁾を直接に使って $Q_1(\omega)$ を求める．一方， $c/\omega \geq 1.0$ の場合では，数値経験により最初に区間 $[0.0, \log_{10}(1.0/\omega) + 1.0]$ でべき型自動積分法を利用し，次に区間 $[\log_{10}(1.0/\omega) + 1.0, c/\omega]$ で関数 $J_{1/4}(\omega t) f(t)$ が滑らかになるため，クレンショウ・カーチス法 (CC 法) に高速フーリエ変換 (FFT) を組み込んで積分を能率的に計算できる¹¹⁾．さらに ω が小さいとき，区間 $[\log_{10}(1.0/\omega) + 1.0, c/\omega]$ が広くなるため，一度に積分を求めることが難しくなる．この場合，区間をいくつかの小区間に分割し，各々部分区間にそれぞれ CC 法を適用する．

2.2 $Q_2(\omega)$ の計算

式 (9) に

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{(-3\pi/8)i} \sum_{n=0}^\infty b_n T_n^*\left(\frac{5}{x}\right) \quad (10)$$

とおくと，式 (2) と式 (9) から次を得る．

$$Q_2(\omega) = \Re \int_{c/\omega}^\infty e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt. \quad (11)$$

このフーリエ積分を能率的に計算するため，Sidi の修正 W 変換⁸⁾を使う．まず c/ω より大きい $\sin \omega t$ の最初の零点を

$$x_0 = \frac{\pi}{\omega} (\lfloor c/\pi \rfloor + 1), \quad (12)$$

とおき， l 番目の零点を

$$x_l = x_0 + \frac{l\pi}{\omega}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

とする．次に下の式 (14) で定義される有限区間積分 $F(x_l)$ を数値的に計算できるとする (3章を参照)：

$$\begin{aligned} F(x_l) &= \int_{c/\omega}^{x_l} e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt, \\ l &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

積分 $\int_{c/\omega}^\infty e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt$ に対しての近似である二次元配列 $W_n^{(j)}$ は，もし n と j が固定されれば，未知数 $W_n^{(j)}$ (1個) と $n+1$ 個の β_i ($i = 0, \dots, n$) の計 $n+2$ 個の未知数に関する次の連立1次方程式を解くことにより求められる⁸⁾．

$$\begin{aligned} F(x_l) &= W_n^{(j)} + \psi(x_l) \sum_{i=0}^n \beta_i / x_l^i, \\ j &\leq l \leq j + n + 1, \end{aligned} \quad (15)$$

ここで

$$\psi(x_l) = \int_{x_l}^{x_{l+1}} e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt$$

$$= F(x_{l+1}) - F(x_l), \\ l = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

は係数列で, $F(x_l)$ が分かれば得られる. 与えられた j, n について, 二次元配列 $W_n^{(j)}$ は, 次の β_i の計算が要らない W アルゴリズム¹²⁾によって能率的に計算される.

- set $M_{-1}^{(s)} = F(x_s)/\psi(x_s)$ and $N_{-1}^{(s)} = 1/\psi(x_s)$, $s = 0, 1, \dots$;
- for $p = 0, 1, \dots, n$ and $s = 0, 1, \dots, p$ compute recursively

$$M_p^{(s)} = (M_{p-1}^{(s)} - M_{p-1}^{(s+1)})/(x_s^{-1} - x_{s+p+1}^{-1}), \\ N_p^{(s)} = (N_{p-1}^{(s)} - N_{p-1}^{(s+1)})/(x_s^{-1} - x_{s+p+1}^{-1}),$$

$$\text{and set } W_p^{(s)} = M_p^{(s)}/N_p^{(s)}.$$

ここで n を固定させて, p が 0 から n までの値に対して, s は 0 から p まで変化させて, 各 $W_p^{(s)}$ を求める. さて j を固定したとき, 数列 $\{W_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$ は, 大変良い収束性を持つ. 一方, n が一定のとき, 近似数列 $W_n^{(0)}, W_{n-1}^{(1)}, \dots, W_p^{(j)} (j+p=n), \dots, W_0^{(n)}$, の中に $W_n^{(0)}$ が最良の近似である¹²⁾. また, 近似 $W_n^{(0)}$ に対する誤差推定を式 $|W_{n+1}^{(0)} - W_n^{(0)}|$ によって行うことができる. だから, 最良な $W_n^{(0)}$ が与えられたら, 積分 $Q_2(\omega)$ は $\Re W_n^{(0)}$ によって近似される.

残った問題は式 (16) で定義された $\psi(x_l)$ を要求精度で計算することである (次章参照).

3. 有限振動積分 $\psi(x_l)$ の計算

前章で述べた修正 W 変換で必要な数列 $W_n^{(0)}$ は式 (16) で定義された積分 $\psi(x_l)$ ($l = -1, 0, 1, \dots$) の数列, あるいは式 (15) の積分 $F(x_l)$ によって, 得られる. 積分 $\psi(x_l)$ 1 つずつを一般的な近似積分法, たとえば, ガウス型公式で計算すれば近似できる. ここで, もし, 関数 $f(x)$ が滑らかであれば, 本章の最後に述べる不定積分 $\int_\alpha^x e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt$ ($\alpha \leq x \leq \beta$) の自動積分法^{7), 11)}によって, 一度に数個 (たとえば r 個) の積分 $\psi(x_{s+1}), \dots, \psi(x_{s+r})$ あるいは不定積分 $\int_{x_s}^x e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt$ を計算すると, より能率的である. ここで $x = x_{s+l}$ ($l = 1, 2, \dots, r$) ととり, s は任意の整数である.

整数 $m > 0$ と $\mu \geq 0$ に対して $s = m + \mu r$ と定義し, 積分 $F(x_{s+l})$ の積分区間 $[c/\omega, x_{s+l}]$ ($0 < l \leq r$) を $\mu+1$ 個の部分区間 K_q ($q = -1, 0, 1, \dots, \mu-1$) および $(x_s, x_{s+l}]$ に分割する:

$$[c/\omega, x_{s+l}] = \left(\bigcup_{q=-1}^{\mu-1} K_q \right) \cup (x_s, x_{s+l}], \quad (17)$$

ここで $K_{-1} = [c/\omega, x_m]$, $K_q = (x_{m+qr}, x_{m+qr+r}]$ ($q = 0, 1, \dots, \mu-1$) とする. m と r の適切な値は後で述べる. すると, $1 \leq l \leq r$ に対して

$$F(x_{s+l}) = \sum_{q=-1}^{\mu-1} F(K_q) + \int_{x_s}^{x_{s+l}} e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt, \\ s = m + \mu r, \quad \mu = 0, 1, \dots \quad (18)$$

ここで $F(K_q)$ は

$$F(K_q) = \int_{t \in K_q} e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt \\ = \int_{x_{m+qr}}^{x_{m+qr+r}} e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt, \quad (19)$$

で定義される. 式 (18) の右辺の積分 $F(K_q)$ と $\int_{x_s}^{x_{s+l}} e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt$ が, 不定積分 $\int_{x_s}^x e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt$, $s = m + \mu r$, $x \in K_q$ ($\mu = 0, 1, \dots$) により効率的に評価できる.

本章の終わりで不定積分 $\int_\alpha^x e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt$ ($\alpha \leq x \leq \beta$) を近似するために使う自動積分法^{7), 9)}のいくつかの修正版を説明する. ここでたとえば, $\alpha = x_s$, $\beta = x_{s+r}$ とすると, 積分区間は $[\alpha, \beta]$ になる. 一次変換 $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow [-1, 1]$ を

$$\phi(t) = \frac{2t - \beta - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \phi(\alpha) = -1, \quad \phi(\beta) = 1, \quad (20)$$

で定義する.

積分 $\int_\alpha^x e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt$ の非振動部分 $g(\omega t) f(t)$ をチェビシェフ多項式 $T_k(t)$ の有限和 $P_N(t)$ で近似する:

$$P_N(t) = p_N(\phi(t)) \equiv \sum_{k=0}^N a_k^N T_k(\phi(t)), \\ \alpha \leq t \leq \beta, \quad (21)$$

ここで 2 つのプライム記号は総和の第 1 項と最後の項が $1/2$ 倍されることを示す. すると $W = (\beta - \alpha)/2$, $T = (\beta + \alpha)/2$ とおき, 次式を得る.

$$\int_\alpha^x e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt \approx \int_\alpha^x e^{i\omega t} P_N(t) dt \\ = W \exp(i\omega T) I(\omega W, \phi(x); p_N), \quad (22)$$

ここで $I(\omega, x; p)$ は次で定義される:

$$I(\omega, x; p) = \int_{-1}^x e^{i\omega t} p(t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (23)$$

関数 $f(t)$ が区間 $[\alpha, \beta] = [x_s, x_{s+r}]$ で十分滑らかであると, チェビシェフ近似の標本点数 $N+1$ を大きくすると, 有限チェビシェフ級数 (21) は急速に収束する. また, 区間 $[\alpha, \beta]$ が狭いほど級数の収束が速いので, 狭い区間, すなわち, 振動の半周期 $[x_{s+i}, x_{s+i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, r-1$) (2 章の W 変換を参照) ごとに $g(\omega t) f(t)$ をチェビシェフ展開すれ

ばよい。しかし、小区間 $[x_{s+i}, x_{s+i+1}]$ ごとに展開したときの必要な各標本数 (= 展開次数 + 1) N_i の総和 $\sum_{i=0}^{r-1} N_i$ と広い区間 $[x_s, x_{s+r}]$ で一度だけチェビシェフ展開するのに必要な標本点数 $N_{(s,r)} (r > 1)$ の間では、不等式 $N_{(s,r)} < \sum_{i=0}^{r-1} N_i$ が数値実験により経験的に分かっている。そして、要求精度に応じて、 r も変化する。したがって、 $N_{(s,r)}$ が $\sum_{i=0}^{r-1} N_i$ より十分小さくなる r を見つけられれば、全体の能率が高くなる (積分の近似を得るための総標本点数が小さい) ことができる。しかし、理論的にこれを決定することはまだできない。そこで、数値実験の結果、要求精度 ϵ_2 に応じて、 $r = 3 + [0.7[-\log_{10} \epsilon_2]]$ と選択する。 $M = [-\log_{10} \epsilon_2]$ とおくと、修正 W 変換の収束が大変速いので $M + 2$ 個の有限積分 $\psi(x_i) (-1 \leq i \leq M)$ ($\psi(x_{-1}) = \int_{c/\omega}^{x_0} e^{i\omega t} g(\omega t) f(t) dt$) で要求精度 ϵ_2 を達成するのに十分である。そこで、式 (18) に対して $m = 2$ および $r = 3 + 0.7M$ と決めた。与えられたクラスの関数 $f(t)$ と要求精度に依存して、 m と r の最適値を決定することは未解決の問題である。

次に式 (22) の右辺の不定積分、あるいは式 (23) の $I(\omega, x; p)$ (ここで $p(t)$ を式 (21) の $p_N(t)$ で置き換え) の計算法を示す。補助関数 $H(x)$ を用いて次のように表す:

$$I(\omega, x; p_N) \equiv \int_{-1}^x e^{i\omega t} p_N(t) dt = \frac{e^{i\omega x} H(x)}{i\omega}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (24)$$

式 (24) の両辺を x で微分して次の 1 階微分方程式を得る:

$$\frac{1}{i\omega} \frac{dH(x)}{dx} + H(x) = p_N(x). \quad (25)$$

これを -1 から x まで積分し

$$\frac{H(x) - H(-1)}{i\omega} + \int_{-1}^x H(t) dt = \int_{-1}^x p_N(t) dt. \quad (26)$$

上式を解くため、次のチェビシェフ展開をする:

$$H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_k(t). \quad (27)$$

これと式 (21) を式 (26) に代入して関係式

$$2 \int T_k(t) dt = \frac{T_{k+1}(t)}{k+1} - \frac{T_{k-1}(t)}{k-1} + \text{const}, \quad k \geq 2,$$

も利用し、チェビシェフ展開式の係数と比較すると、

$$b_{k-1} + \frac{2k}{i\omega} b_k - b_{k+1} = a_{k-1}^N - a_{k+1}^N, \quad 1 \leq k, \quad (28)$$

を得る。便宜上 $a_k^N \equiv 0 (k > N)$ とおく。ここで式 (27) の係数 b_k が ω と $p_N(t)$ の係数 a_k^N に依存することを明記することを省略した。

求めたい係数 b_k は、正規化条件 $\sum_{k=0}^N (-1)^k b_k = 0$ (式 (24) において $H(-1) = 0$ でなければならないから) を満足する非同次 3 項漸化式 (28) の非優位解 (nondominant solution) である。これを数値的に安定に計算する方法は Hasegawa and Torii¹³⁾ を参照のこと。

4. チェビシェフ級数展開と FFT

式 (21) の多項式列 $\{p_N\}$ を、修正 FFT¹¹⁾ を利用して能率的で再帰的に構成する方法の概略を示す。またこれにより要求精度で積分 $Q_2(\omega)$ (9) を計算する。もちろん CC 法¹⁴⁾ にも効率的に組み込まれる。線形変換 $\phi(t)$ (20) を用いて任意の有限区間を $[-1, 1]$ に変換できるため、ここで区間 $[-1, 1]$ 上の不定積分 $I(\omega, x; p)$ (23) およびその近似 $I_N \equiv I(\omega, x; p_N)$ だけを考える。

非適応型自動積分法は、一般に収束する積分の近似列 $\{I_N\}$ と適当な誤差推定法から構成される。その誤差推定が停止則を満足するまで近似を反復的に計算する。近似列 $\{I_N\}$ をつくるための多項式 $p_N(t)$ (21) の次数 N は、倍々にするのが通常である。しかし、自動積分を効率的にするためには、要求精度を満足するまで、 N を倍々より緩やかに増大するほうがよい。Hasegawa et al.¹¹⁾ は $p_N(t)$ の次数 N を 2^n のほかに 3×2^n と 5×2^n と増大する方法を示した。

今後 N は 2 の巾乗、すなわち $N = 2^n$ ($n = 2, 3, \dots$) と仮定する。今から 6 章で説明する停止則を満足するまで、有限チェビシェフ級数列 $\{p_N, p_{5N/4}, p_{3N/2}\}$, $N = 2^n$, $n = 2, 3, \dots$, を反復的に構成する方法を述べる。

次式で定義される多項式 $w_{N+1}(t)$ の零点を $t_j^N = \cos(\pi j/N)$ ($0 \leq j \leq N$) とおく:

$$w_{N+1}(t) = T_{N+1}(t) - T_{N-1}(t) = 2(t^2 - 1)U_{N-1}(t), \quad (29)$$

ここで $U_{N-1}(t)$ は第 2 種チェビシェフ多項式 $U_{N-1}(t) = \sin(N\theta)/\sin\theta$, $t = \cos\theta$ である。 $p_N(t)$ が標本点 t_j^N で $f(t)$ を補間するように $p_N(t)$ の係数 a_k^N が決定される¹⁴⁾。その a_k^N の表示式は:

$$a_k^N = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N f(\cos \frac{\pi j}{N}) \cos(\frac{\pi k j}{N}), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (30)$$

式 (30) の右辺は実数データの FFT¹⁵⁾ により効率的に計算されることが知られている。

整数 $\sigma = 2, 4$ に対し, $\{v_j^{N/\sigma}\}$ ($0 \leq j < N/\sigma$) を $T_N(t)$ の零点集合の部分集合とする, 特に $T_{N/\sigma}(t) - \cos 3\pi/(2\sigma)$ の N/σ 個の零点の集合に一致するよう選ぶ. このとき $w_{N+1}(t)$ (29) の零点のほかに標本点 $v_j^{N/\sigma}$, $0 \leq j < N/\sigma$ ($\sigma = 2, 4$) で $f(t)$ を補間する多項式 $p_{N+N/\sigma}(t)$ ($\sigma = 2, 4$) を, 次のニュートン形式で表す:

$$\begin{aligned} & p_{N+N/\sigma}(t) - p_N(t) \\ &= -w_{N+1}(t) \sum_{k=1}^{N/\sigma} B_k^{N/\sigma} U_{k-1}(t) \\ &= \sum_{k=1}^{N/\sigma} B_k^{N/\sigma} \{T_{N-k}(t) - T_{N+k}(t)\}. \end{aligned} \quad (31)$$

係数 $\{B_k^{N/\sigma}\}$ は次の補間条件を満足するよう決められる.

$$\begin{aligned} f(v_j^{N/\sigma}) &= p_{N+N/\sigma}(v_j^{N/\sigma}), \\ 0 \leq j < N/\sigma, \quad \sigma &= 2, 4. \end{aligned} \quad (32)$$

実際, 係数 $B_k^{N/\sigma}$ は FFT¹¹⁾ を利用して能率的に計算される. $p_{5N/4}(t) - p_N(t)$ に対する $N/4$ 個の標本点 $\{v_j^{N/4}\}$ ($0 \leq j < N/4$) が, $p_{3N/2}(t) - p_N(t)$ に対する $N/2$ 個の標本点集合 $\{v_j^{N/2}\}$ ($0 \leq j < N/2$) に含まれ, さらにこの集合は $p_{2N}(t) - p_N(t)$ に対する N 個の標本点集合, すなわち $T_N(t)$ ($= w_{2N+1}(t)/\{2w_{N+1}(t)\}$) の零点集合に含まれることに注意する. この事実から, FFT を利用して数列 $\{p_{3m}, p_{4m}, p_{5m}\}$ ($m = 2^n, n = 1, 2, \dots$) を反復的に計算するアルゴリズムが得られる. 詳細は Hasegawa et al. の修正 FFT¹¹⁾ を参照のこと.

5. 誤差評価

積分 $I(\omega, x, f)$ (23) に対する近似 $I(\omega, x; p_{N+mN/4})$ ($m = 0, 1, 2$), ここで $p_{N+mN/4}(t)$ は式 (21) と式 (31) で与えられる, の打ち切り誤差を評価する.

複素平面 $z = x + iy$ 上の楕円で, 焦点が $(-1, 0)$ と $(1, 0)$, 長軸と短軸の長さの半分が各々 $a = (\rho + \rho^{-1})/2$ と $b = (\rho - \rho^{-1})/2$ であるものを ε_ρ と表す. ここで, ρ は定数 ($\rho > 1$) とする. さて, $f(z)$ が ε_ρ 内および周上で一価かつ解析的と仮定する. すると, 補間多項式 $p_N(t)$ の誤差は次の複素積分で表される^{9), 16)}.

$$\begin{aligned} f(t) - p_N(t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_\rho} \frac{w_{N+1}(t)f(z)dz}{(z-t)w_{N+1}(z)} \\ &= w_{N+1}(t) \sum_{k=0}^{\infty} V_k^N(f) T_k(t), \end{aligned} \quad (33)$$

ここで係数 $V_k^N(f)$ は次式で与えられ,

$$V_k^N(f) = \frac{1}{\pi^2 i} \oint_{\varepsilon_\rho} \frac{\tilde{U}_k(z)f(z)dz}{w_{N+1}(z)}, \quad k \geq 0, \quad (34)$$

$\tilde{U}_k(z)$ は次で定義される第 2 種チェビシェフ関数

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k(z) &= \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)dt}{(z-t)\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}u^k} = \frac{2\pi}{(u-u^{-1})u^k}, \end{aligned} \quad (35)$$

で, $z \notin [-1, 1]$ に対して $u = z + \sqrt{z^2-1}$ ($|u| > 1$) である.

式 (23) に式 (33) を使うと, 近似積分 $I(\omega, x; p_N)$ の誤差は

$$\begin{aligned} I(\omega, x; f) - I(\omega, x; p_N) &= I(\omega, x; f - p_N) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} V_k^N(f) \Omega_k^N(x). \end{aligned} \quad (36)$$

ここで $\Omega_k^N(x)$ は

$$\Omega_k^N(x) = \int_{-1}^x e^{i\omega t} w_{N+1}(t) T_k(t) dt, \quad (37)$$

で定義され, $|e^{i\omega t}| \leq 1$ と $|T_k(t)| \leq 1$ を注意すれば, $|\Omega_k^N(x)| \leq \int_{-1}^x |w_{N+1}(t)| dt$ が分かる. さらに, 式 (29) により $|w_{N+1}(t)| \leq |T_{N+1}(t)| + |T_{N-1}(t)| \leq 2$ であるから, $\int_{-1}^x |w_{N+1}(t)| dt \leq 2 \int_{-1}^x dt = 2(x+1)$ が得られる. $|x| \leq 1$ に対して N, k, ω および x に独立に $|\Omega_k^N(x)| \leq \int_{-1}^x |w_{N+1}(t)| dt \leq 4$ であることが分かる.

ここでさらに, $f(z)$ が, ε_ρ の外部に M 個の単極 z_m ($m = 1, 2, \dots, M$) と, そこでの留数 $\text{Res} f(z_m)$ を持つ有理型関数と仮定する. すると式 (34) の複素積分を実行して

$$\begin{aligned} V_k^N(f) &= -\frac{1}{\pi^2 i} \oint_E \frac{\tilde{U}_k(z)f(z)dz}{w_{N+1}(z)} \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^M \frac{\text{Res} f(z_m) \tilde{U}_k(z_m)}{w_{N+1}(z_m)}, \\ & \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (38)$$

ここで E は ± 1 に焦点を持つ楕円で, 極 z_m ($m = 1, 2, \dots, M$) が E 内にあり, $f(z)$ のその他の特異性が存在しないようなものである. 複素数 $z = (u + u^{-1})/2 \notin [-1, 1]$, ここで $|u| > 1$, に対して $T_k(z) = (u^k + u^{-k})/2$ であることに注意すると, 式 (29) から $w_{N+1}(z) = \sqrt{z^2-1}(u^N - u^{-N})$ が得られ, 式 (35) と結合して次式が導かれる:

$$\frac{\tilde{U}_k(z)}{w_{N+1}(z)} = \frac{\pi}{(z^2-1)u^k(u^N - u^{-N})}. \quad (39)$$

式 (38) の右辺で最も大きい項は極 z_j , ここで

$$\left| z_j + \sqrt{z_j^2 - 1} \right| = \min_{1 \leq m \leq M} \left| z_m + \sqrt{z_m^2 - 1} \right| \equiv r > 1 \quad (40)$$

からのものである．そのような z_j がただ 1 つ存在すると仮定すると，十分大きい N に対して $V_k^N(f) \sim V_0^N(f)u_j^{-k}$ ，ここで $u_j = z_j + \sqrt{z_j^2 - 1}$ である．このことと式 (36) から次の誤差推定が得られる：

$$|I(\omega, x; f - p_N)| \leq 4 \sum_{k=0}^{\infty} |V_k^N(f)| \sim 4|V_0^N(f)| \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} = 4|V_0^N(f)| \frac{r+1}{2(r-1)}. \quad (41)$$

さて $|V_0^N(f)|$ を，多項式 $p_N(t)$ の計算された係数 a_k^N を用いて表現したい．Elliott¹⁶⁾ は次の関係を与えている．

$$a_k^N = \frac{2}{\pi i} \oint_{\varepsilon_\rho} \frac{T_{N-k}(z)f(z)}{w_{N+1}(z)} dz, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (42)$$

複素積分を実行して，その結果を式 (38) と比較すると極 z_m が実軸上の区間 $[-1, 1]$ に近くない限り，関係 $|V_0^N| \sim |a_N^N| r / (r^2 - 1)$ と $|a_k^N| \sim r |a_{k+1}^N|$ が得られる．これらと式 (41) から，打ち切り誤差 $|I(\omega, x; f - p_N)|$ の推定 R_N は

$$R_N = \frac{4(|a_N^N|/2)r}{(r-1)^2} \quad (43)$$

である．ここで定数 r は $\{a_k^N\}$ の漸近的振舞いから推定できる¹¹⁾．

同様にして，近似積分 $I(\omega, x; p_{N+N/\sigma})(\sigma = 2, 4)$ の打ち切り誤差の推定 $R_{N+N/\sigma}$ は

$$R_{N+N/\sigma} = \frac{8(1 + |\cos 3\pi/(2\sigma)|)|B_{N/\sigma}^{N/\sigma}|r}{(r-1)^2} \quad (44)$$

である．

関係式 (43) と (44) から誤差は ω の値と無関係に推定できることが分かる．したがって，非振動積分 $I(0, 1; f) = \int_{-1}^1 f(t)dt$ に対する積分則 $I(0, 1; p_{N+mN})(m = 0, 1, 2)$ の誤差も，各々式 (43) と式 (44) によって推定できる．次章では，誤差推定 (43) と (44) を使って $Q(\omega)$ に対する自動積分の停止則を導く．

6. 停 止 則

自動積分法の効率は，適当な積分則の選択のほかに適切な誤差推定に基づいた停止則に依存する．

式 (7) から積分 $Q(\omega)$ を 2 つの積分， $[0, c/\omega]$ 上の $Q_1(\omega)$ と $[c/\omega, \infty)$ 上の $Q_2(\omega)$ ，に分割したことを思い出そう．両積分に各々要求精度 ϵ_1 と ϵ_2 を割り当て，

全体の積分 $Q(\omega)$ に対する精度 $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ をできるだけ少ない標本点数で達成したい．このため，積分 $Q_1(\omega)$ と $Q_2(\omega)$ の要求精度 ϵ_1 と ϵ_2 の適切な値を決定しなければならない．式 (5) のチェビシェフ展開式によって， $Q_1(\omega)$ の被積分関数が滑らかで，振動しないことになり，また，積分区間 $[0, c/\omega]$ も $Q_2(\omega)$ の積分区間 $[c/\omega, \infty)$ と比べて小さい．一方，滑らかな関数の狭い区間でのチェビシェフ展開は収束が速い．だから，積分 $Q_1(\omega)$ の要求精度 ϵ_1 を厳しくしても計算量はあまり増えない．しかし，具体的な ϵ_1 と ϵ_2 の比率を決める基準がないので，滑らかな関数に対して，数値実験をした結果により， $\epsilon_1/\epsilon_2 \doteq 1/20$ 程度が適当と判断し，ここで $\epsilon_1 = \epsilon/20$ と $\epsilon_2 = 19\epsilon/20$ と選ぶ．

さらに無限積分 $Q_2(\omega)$ (9) が，有限積分 $F(x_l)(l = -1, 0, 1, \dots)$ (14) あるいは式 (18) の $F(x_{s+l})$ に対する近似と修正 W 変換を用いて，効率的に近似されることを見てきた．次の問題は，各区間 K_q 上の積分 $F(K_q)(q = -1, 0, 1, \dots)$ (19) に要求精度を割り当てる方法である．一般的に， $Q_2(\omega)$ に対する割り当てられた要求精度 ϵ_2 を達成するために，修正 W 変換で必要となる積分 $F(K_q)(q = -1, 0, 1, \dots)$ の数がいくつかを前もって知ることは困難である．しかし数値実験の結果から，幅広いクラスの収束する無限振動積分を修正 W 変換が大変速く収束する数列に変換するので，精度 ϵ_2 を達成するのに 2 つあるいはたかだか 3 つの区間 $K_q(q = -1, 0 \text{ or } 1)$ で十分であることが分かる (K_q を ϵ_2 に依存して決定したことに注意する)．

上記のことから， $K_q(q = -1, 0, 1, \dots)$ 上の各積分 $F(K_q)$ に割り当てる要求精度を経験的に以下のように決定する． $Q_2(\omega)$ の関数 $f(x)$ が，無限大で単調に減衰する滑らかな関数と仮定すれば，3 つの積分区間 $K_q(q = -1, 0, 1)$ で十分であるとする．このとき，各積分 $F(K_q)(q = -1, 0, 1)$ に要求精度 $\epsilon_2/3$ を割り当てる．もし $f(x)$ が振動したり，ピークがある関数のときは，3 つの区間では足りないことがある．

一方，修正 W 変換を使うとき，定積分 $F(K_q)$ の計算がいくつか決められない場合， $F(K_q)(q = -1, 0, 1, \dots, \infty)$ の要求精度は $\epsilon_2/2^{q+2}$ とおけば，不定積分 $Q_2(\omega)$ (9) の精度は $\epsilon_2 = \sum_{q=-1}^{\infty} (\epsilon_2/2^{q+2})$ になるといふより慎重な方法がある．こうすれば，本自動積分法はもっと安定になるが，効率が低下し，また大きな q と K_q に対して要求精度も厳しくなるため，収束した結果を得ることは困難になる．

最後に停止則のまとめを示す．積分 $Q_1(\omega)$ (8) に対して， $\varphi(t) = f(t)J_\nu(\omega t)$ および $\Phi(x) = \varphi((c/\omega)$

表 1 ベッセル関数 $J_{1/4}(\omega x)$ を含む半無限区間の積分 Int_1, Int_2, Int_3 の結果
 ここで、積分 Int_1, Int_2, Int_3 に対する要求精度 $\epsilon = 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$ を満
 たすため、それぞれ本方法 (Present) と大浦の計算法 (Ooura) を使って総標本点数と
 絶対誤差を示す。M 列は Sidi の修正 W 変換に使用される半周期積分の数を表す。

Table 1 Computed results for the integrals Int_1, Int_2 and Int_3 involving Bessel
 functions $J_{1/4}(\omega x)$.

Int.	a	ω	$\epsilon = 10^{-6}$						$\epsilon = 10^{-9}$						$\epsilon = 10^{-12}$					
			Present			Ooura			Present			Ooura			Present			Ooura		
			N	error	M	N	error	M	N	error	M	N	error	M	N	error	M	N	error	M
1	1/8	1/4	101	$2 \cdot 10^{-8}$	6	103	$2 \cdot 10^{-8}$		141	$3 \cdot 10^{-11}$	9	154	$8 \cdot 10^{-12}$		201	$1 \cdot 10^{-14}$	11	209	$3 \cdot 10^{-15}$	
		1	82	$2 \cdot 10^{-8}$	6	102	$2 \cdot 10^{-8}$		124	$1 \cdot 10^{-12}$	9	154	$9 \cdot 10^{-12}$		152	$1 \cdot 10^{-14}$	11	209	$3 \cdot 10^{-15}$	
		4	66	$2 \cdot 10^{-8}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		88	$2 \cdot 10^{-12}$	9	77	$5 \cdot 10^{-12}$		116	$1 \cdot 10^{-14}$	11	105	$4 \cdot 10^{-15}$	
		16	47	$5 \cdot 10^{-9}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		71	$3 \cdot 10^{-12}$	9	77	$6 \cdot 10^{-12}$		95	$2 \cdot 10^{-14}$	11	105	$4 \cdot 10^{-15}$	
	1/2	1/4	81	$2 \cdot 10^{-8}$	6	102	$2 \cdot 10^{-8}$		117	$4 \cdot 10^{-13}$	9	154	$9 \cdot 10^{-12}$		145	$9 \cdot 10^{-15}$	11	209	$2 \cdot 10^{-15}$	
		1	66	$2 \cdot 10^{-8}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		88	$2 \cdot 10^{-12}$	9	77	$5 \cdot 10^{-12}$		120	$9 \cdot 10^{-15}$	11	105	$4 \cdot 10^{-15}$	
		4	52	$6 \cdot 10^{-9}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		72	$2 \cdot 10^{-13}$	9	77	$6 \cdot 10^{-12}$		96	$2 \cdot 10^{-14}$	11	105	$4 \cdot 10^{-15}$	
		16	37	$5 \cdot 10^{-8}$	6	51	$8 \cdot 10^{-9}$		51	$6 \cdot 10^{-11}$	9	77	$4 \cdot 10^{-12}$		63	$2 \cdot 10^{-14}$	12	105	$3 \cdot 10^{-15}$	
	2	1/4	61	$2 \cdot 10^{-7}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		85	$4 \cdot 10^{-11}$	9	77	$5 \cdot 10^{-12}$		125	$1 \cdot 10^{-14}$	11	105	$5 \cdot 10^{-15}$	
		1	50	$5 \cdot 10^{-9}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		72	$9 \cdot 10^{-13}$	9	77	$6 \cdot 10^{-12}$		96	$2 \cdot 10^{-14}$	11	105	$4 \cdot 10^{-15}$	
		4	42	$6 \cdot 10^{-8}$	6	51	$8 \cdot 10^{-9}$		60	$6 \cdot 10^{-11}$	9	77	$4 \cdot 10^{-12}$		76	$2 \cdot 10^{-14}$	12	105	$3 \cdot 10^{-15}$	
		16	35	$3 \cdot 10^{-8}$	6	51	$9 \cdot 10^{-9}$		39	$1 \cdot 10^{-11}$	10	77	$4 \cdot 10^{-13}$		62	$2 \cdot 10^{-14}$	14	105	$2 \cdot 10^{-16}$	
2	1/8	1/4	61	$3 \cdot 10^{-7}$	5	39	$4 \cdot 10^{-8}$		73	$1 \cdot 10^{-10}$	7	59	$1 \cdot 10^{-11}$		111	$1 \cdot 10^{-14}$	8	81	$3 \cdot 10^{-15}$	
		1	46	$5 \cdot 10^{-9}$	6	51	$6 \cdot 10^{-8}$		54	$1 \cdot 10^{-11}$	8	77	$3 \cdot 10^{-11}$		68	$2 \cdot 10^{-14}$	10	105	$3 \cdot 10^{-14}$	
		4	42	$7 \cdot 10^{-9}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		50	$3 \cdot 10^{-11}$	8	77	$5 \cdot 10^{-12}$		56	$2 \cdot 10^{-14}$	10	105	$4 \cdot 10^{-15}$	
		16	35	$7 \cdot 10^{-9}$	6	51	$2 \cdot 10^{-9}$		35	$6 \cdot 10^{-12}$	8	77	$1 \cdot 10^{-12}$		39	$1 \cdot 10^{-14}$	10	105	$8 \cdot 10^{-16}$	
	1/2	1/4	55	$6 \cdot 10^{-10}$	4	39	$4 \cdot 10^{-10}$		75	$4 \cdot 10^{-11}$	4	59	$2 \cdot 10^{-13}$		109	$2 \cdot 10^{-14}$	6	81	0	
		1	48	$4 \cdot 10^{-9}$	5	39	$1 \cdot 10^{-8}$		66	$6 \cdot 10^{-12}$	6	59	$3 \cdot 10^{-12}$		80	$1 \cdot 10^{-14}$	8	81	$9 \cdot 10^{-16}$	
		4	42	$5 \cdot 10^{-9}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		56	$2 \cdot 10^{-12}$	8	77	$8 \cdot 10^{-12}$		62	$3 \cdot 10^{-15}$	10	105	$6 \cdot 10^{-15}$	
		16	35	$5 \cdot 10^{-9}$	6	51	$3 \cdot 10^{-9}$		35	$2 \cdot 10^{-12}$	8	77	$1 \cdot 10^{-12}$		43	$4 \cdot 10^{-15}$	10	105	$9 \cdot 10^{-16}$	
	2	1/4	48	$4 \cdot 10^{-10}$	10	40	$5 \cdot 10^{-12}$		60	$3 \cdot 10^{-12}$	5	60	$2 \cdot 10^{-15}$		76	$3 \cdot 10^{-14}$	7	81	$5 \cdot 10^{-16}$	
		1	46	$8 \cdot 10^{-12}$	4	39	$1 \cdot 10^{-10}$		60	$1 \cdot 10^{-11}$	4	59	$5 \cdot 10^{-14}$		96	$5 \cdot 10^{-15}$	6	81	0	
		4	46	$8 \cdot 10^{-10}$	5	39	$2 \cdot 10^{-9}$		64	$2 \cdot 10^{-12}$	6	59	$7 \cdot 10^{-13}$		80	$2 \cdot 10^{-15}$	8	81	$2 \cdot 10^{-16}$	
		16	35	$1 \cdot 10^{-8}$	5	51	$4 \cdot 10^{-9}$		39	$4 \cdot 10^{-12}$	7	77	$2 \cdot 10^{-12}$		49	$2 \cdot 10^{-14}$	9	105	$2 \cdot 10^{-15}$	
3	1/8	1/4	93	$1 \cdot 10^{-9}$	2	80	$4 \cdot 10^{-11}$		125	$3 \cdot 10^{-11}$	2	119	$9 \cdot 10^{-14}$		173	$6 \cdot 10^{-16}$	2	162	$3 \cdot 10^{-16}$	
		1	78	$9 \cdot 10^{-9}$	4	79	$5 \cdot 10^{-11}$		120	$3 \cdot 10^{-11}$	5	118	$2 \cdot 10^{-13}$		152	$4 \cdot 10^{-15}$	7	161	0	
		4	66	$1 \cdot 10^{-8}$	7	51	$7 \cdot 10^{-10}$		88	$6 \cdot 10^{-12}$	10	77	$6 \cdot 10^{-14}$		116	$9 \cdot 10^{-15}$	12	105	$2 \cdot 10^{-15}$	
		16	47	$3 \cdot 10^{-9}$	6	51	$8 \cdot 10^{-9}$		71	$1 \cdot 10^{-11}$	8	77	$4 \cdot 10^{-12}$		95	$1 \cdot 10^{-14}$	10	105	$3 \cdot 10^{-15}$	
	1/2	1/4	69	$9 \cdot 10^{-10}$	2	79	$3 \cdot 10^{-11}$		89	$1 \cdot 10^{-10}$	2	118	$1 \cdot 10^{-13}$		117	$6 \cdot 10^{-16}$	2	161	$6 \cdot 10^{-17}$	
		1	60	$1 \cdot 10^{-8}$	4	39	$9 \cdot 10^{-11}$		84	$3 \cdot 10^{-11}$	5	59	$2 \cdot 10^{-13}$		120	$7 \cdot 10^{-16}$	7	81	$3 \cdot 10^{-16}$	
		4	52	$7 \cdot 10^{-9}$	8	51	$7 \cdot 10^{-10}$		76	$3 \cdot 10^{-11}$	10	77	$1 \cdot 10^{-13}$		100	$2 \cdot 10^{-15}$	13	105	0	
		16	37	$3 \cdot 10^{-8}$	6	51	$6 \cdot 10^{-9}$		51	$1 \cdot 10^{-10}$	8	77	$3 \cdot 10^{-12}$		63	$4 \cdot 10^{-14}$	11	105	$2 \cdot 10^{-15}$	
	2	1/4	57	$9 \cdot 10^{-11}$	2	78	$2 \cdot 10^{-11}$		69	$4 \cdot 10^{-12}$	2	118	$7 \cdot 10^{-15}$		97	$1 \cdot 10^{-17}$	2	161	$4 \cdot 10^{-17}$	
		1	46	$9 \cdot 10^{-9}$	4	39	$7 \cdot 10^{-12}$		64	$4 \cdot 10^{-12}$	5	59	$3 \cdot 10^{-15}$		100	$4 \cdot 10^{-16}$	7	81	$1 \cdot 10^{-11}$	
		4	40	$5 \cdot 10^{-8}$	5	51	$5 \cdot 10^{-10}$		58	$4 \cdot 10^{-10}$	6	77	$1 \cdot 10^{-13}$		76	$8 \cdot 10^{-15}$	10	105	$3 \cdot 10^{-17}$	
		16	31	$2 \cdot 10^{-8}$	5	51	$1 \cdot 10^{-11}$		39	$5 \cdot 10^{-11}$	9	77	$7 \cdot 10^{-14}$		49	$2 \cdot 10^{-13}$	12	105	$1 \cdot 10^{-16}$	

$(x+1)/2$), ここで $-1 \leq x \leq 1$ と定義する。また $c=5$ とおいた。さらに、 $\Phi(x)$ を有限チェビシェフ級数 $p_N(x)$ (21) (あるいは $p_{N+N/\sigma}(x)$ (31)) で近似する。誤差推定 R_N (43) (あるいは $R_{N+N/\sigma}$ (44)) が $2\epsilon_1/(c/\omega)$ 以下であれば、 $p_N(x)$ (あるいは $p_{N+N/\sigma}(x)$) を使った近似を受け入れる。

積分 $F(K_q)(q = -1, 0, 1)$ (19) に対して $\varphi(t) = f(t)g(\omega t)$ と定義する。さらに $\varphi(t)$ を用いて $q = 0, 1$ に対して $\Phi_q(x) = \varphi((x_{m+qr+r} - x_{m+qr})x/2 + (x_{m+qr+r} + x_{m+qr})/2)$, また $q = -1$ に対して $\Phi_q(x) = \varphi((x_m - c/\omega)x/2 + (x_m + c/\omega)/2)$, と定義する。こ

のとき、 $\Phi_q(x)$ を区間 $[-1, 1]$ 上の多項式 $p_N(x)$ (あるいは $p_{N+N/\sigma}(x)$) で近似する。誤差推定 R_N (あるいは $R_{N+N/\sigma}$) が $2(\epsilon_2/3)/(x_{m+qr+r} - x_{m+qr})$ ($q = 0, 1$) または $2(\epsilon_2/3)/(x_m - c/\omega)$ ($q = -1$) 以下なら、それに対応した近似を受け入れる。

7. 数値実験と分析

本方法の性能と精度を示すため、以下のベッセル関数 $J_\nu(\omega x)$ ($\nu = 1/4$) を含む半無限区間 $[0, \infty)$ での次の 5 種類の積分 $Int_n = \int_0^\infty f_n(x) J_\nu(\omega x) dx$ ($\nu = 1/4$) ($n = 1, 2, 3, 4, 5$)¹⁷⁾ の数値実験を実行して、大

表 2 ベッセル関数 $J_{1/4}(\omega x)$ を含む半無限区間の積分 Int_4, Int_5 の結果
 ここで, 積分 Int_4, Int_5 に対する要求精度 $\epsilon = 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$ を満たすため,
 それぞれ本方法 (Present) と大浦の計算法 (Ooura) を使って, 総標本点数と絶対誤差
 を示す. M 列は Sidi の修正 W 変換に使用される半周期積分の数を表す.

Table 2 Computed results for the integrals Int_4 and Int_5 involving Bessel functions $J_{1/4}(\omega x)$.

Int.	a	ω	$\epsilon = 10^{-6}$						$\epsilon = 10^{-9}$						$\epsilon = 10^{-12}$					
			Present			Ooura			Present			Ooura			Present			Ooura		
			N	error	M	N	error	M	N	error	M	N	error	M	N	error	M	N	error	M
4	1/8	1/4	117	$2 \cdot 10^{-8}$	6	101	$4 \cdot 10^{-8}$		153	$3 \cdot 10^{-11}$	9	153	$2 \cdot 10^{-11}$		201	$2 \cdot 10^{-14}$	11	209	$7 \cdot 10^{-19}$	
		1	82	$1 \cdot 10^{-8}$	6	101	$3 \cdot 10^{-8}$		120	$2 \cdot 10^{-11}$	9	153	$1 \cdot 10^{-11}$		168	$1 \cdot 10^{-14}$	11	209	$5 \cdot 10^{-15}$	
		4	72	$1 \cdot 10^{-8}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		88	$7 \cdot 10^{-12}$	9	77	$7 \cdot 10^{-12}$		112	$2 \cdot 10^{-14}$	11	209	$3 \cdot 10^{-15}$	
		16	45	$1 \cdot 10^{-8}$	6	51	$8 \cdot 10^{-9}$		67	$4 \cdot 10^{-12}$	9	77	$4 \cdot 10^{-12}$		91	$2 \cdot 10^{-14}$	11	105	$3 \cdot 10^{-15}$	
	1/2	1/4	85	$2 \cdot 10^{-8}$	6	101	$4 \cdot 10^{-8}$		109	$3 \cdot 10^{-11}$	9	153	$2 \cdot 10^{-11}$		145	$3 \cdot 10^{-14}$	11	209	$5 \cdot 10^{-15}$	
		1	62	$1 \cdot 10^{-8}$	6	51	$2 \cdot 10^{-8}$		92	$4 \cdot 10^{-12}$	9	77	$1 \cdot 10^{-11}$		116	$2 \cdot 10^{-14}$	11	209	$4 \cdot 10^{-15}$	
		4	50	$3 \cdot 10^{-9}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		68	$8 \cdot 10^{-12}$	9	77	$6 \cdot 10^{-12}$		88	$1 \cdot 10^{-14}$	11	105	$4 \cdot 10^{-15}$	
		16	37	$9 \cdot 10^{-8}$	6	51	$3 \cdot 10^{-9}$		47	$5 \cdot 10^{-12}$	10	77	$2 \cdot 10^{-12}$		75	$2 \cdot 10^{-15}$	13	105	$1 \cdot 10^{-15}$	
	2	1/4	69	$2 \cdot 10^{-8}$	6	51	$2 \cdot 10^{-8}$		93	$2 \cdot 10^{-12}$	9	77	$1 \cdot 10^{-11}$		125	$2 \cdot 10^{-14}$	11	209	$6 \cdot 10^{-15}$	
		1	50	$6 \cdot 10^{-9}$	6	51	$2 \cdot 10^{-8}$		76	$5 \cdot 10^{-12}$	9	77	$8 \cdot 10^{-12}$		100	$3 \cdot 10^{-14}$	11	105	$6 \cdot 10^{-15}$	
		4	40	$2 \cdot 10^{-8}$	7	51	$4 \cdot 10^{-9}$		64	$4 \cdot 10^{-12}$	10	77	$3 \cdot 10^{-12}$		84	$3 \cdot 10^{-15}$	13	105	$2 \cdot 10^{-15}$	
		16	31	$1 \cdot 10^{-9}$	5	51	$3 \cdot 10^{-10}$		43	$2 \cdot 10^{-11}$	10	77	$1 \cdot 10^{-13}$		72	$1 \cdot 10^{-14}$	14	105	$3 \cdot 10^{-16}$	
5	-3/4	1/4	61	$2 \cdot 10^{-8}$	6	56	$3 \cdot 10^{-8}$		81	$1 \cdot 10^{-10}$	9	84	$1 \cdot 10^{-11}$		115	$2 \cdot 10^{-14}$	11	113	$4 \cdot 10^{-15}$	
		1	50	$1 \cdot 10^{-8}$	6	56	$2 \cdot 10^{-8}$		70	$2 \cdot 10^{-12}$	9	84	$8 \cdot 10^{-12}$		100	$2 \cdot 10^{-14}$	11	113	$3 \cdot 10^{-15}$	
		4	52	$1 \cdot 10^{-8}$	6	56	$1 \cdot 10^{-8}$		68	$7 \cdot 10^{-13}$	9	84	$6 \cdot 10^{-12}$		92	$9 \cdot 10^{-15}$	11	113	$2 \cdot 10^{-15}$	
		16	39	$2 \cdot 10^{-9}$	6	56	$9 \cdot 10^{-9}$		55	$3 \cdot 10^{-11}$	8	84	$4 \cdot 10^{-12}$		75	$8 \cdot 10^{-14}$	10	113	$1 \cdot 10^{-15}$	
	-1/4	1/4	53	$1 \cdot 10^{-8}$	7	52	$9 \cdot 10^{-8}$		71	$9 \cdot 10^{-12}$	9	78	$5 \cdot 10^{-11}$		95	$7 \cdot 10^{-14}$	11	106	$3 \cdot 10^{-14}$	
		1	44	$3 \cdot 10^{-9}$	7	52	$3 \cdot 10^{-8}$		66	$3 \cdot 10^{-13}$	9	78	$2 \cdot 10^{-11}$		80	$3 \cdot 10^{-14}$	11	106	$1 \cdot 10^{-14}$	
		4	42	$8 \cdot 10^{-10}$	6	52	$1 \cdot 10^{-8}$		60	$4 \cdot 10^{-11}$	8	78	$6 \cdot 10^{-12}$		84	$9 \cdot 10^{-15}$	11	106	$4 \cdot 10^{-15}$	
		16	37	$1 \cdot 10^{-8}$	6	52	$4 \cdot 10^{-9}$		47	$9 \cdot 10^{-12}$	8	78	$2 \cdot 10^{-12}$		63	$4 \cdot 10^{-14}$	10	106	$1 \cdot 10^{-15}$	
	-1/8	1/4	55	$2 \cdot 10^{-7}$	7	51	$1 \cdot 10^{-7}$		77	$8 \cdot 10^{-11}$	9	77	$6 \cdot 10^{-11}$		115	$9 \cdot 10^{-14}$	11	105	$4 \cdot 10^{-14}$	
		1	46	$2 \cdot 10^{-8}$	7	51	$4 \cdot 10^{-8}$		58	$2 \cdot 10^{-11}$	9	77	$2 \cdot 10^{-11}$		88	$4 \cdot 10^{-14}$	11	105	$1 \cdot 10^{-14}$	
		4	44	$5 \cdot 10^{-9}$	6	51	$1 \cdot 10^{-8}$		60	$5 \cdot 10^{-11}$	8	77	$6 \cdot 10^{-12}$		76	$3 \cdot 10^{-15}$	11	105	$4 \cdot 10^{-15}$	
		16	35	$8 \cdot 10^{-9}$	6	51	$3 \cdot 10^{-9}$		47	$9 \cdot 10^{-12}$	8	77	$2 \cdot 10^{-12}$		63	$3 \cdot 10^{-14}$	10	105	$1 \cdot 10^{-15}$	
	1/8	1/4	57	$3 \cdot 10^{-7}$	7	51	$2 \cdot 10^{-7}$		79	$1 \cdot 10^{-11}$	10	77	$1 \cdot 10^{-10}$		115	$4 \cdot 10^{-15}$	12	105	$6 \cdot 10^{-14}$	
		1	46	$2 \cdot 10^{-8}$	7	51	$4 \cdot 10^{-8}$		58	$2 \cdot 10^{-11}$	9	77	$2 \cdot 10^{-11}$		88	$4 \cdot 10^{-14}$	11	105	$1 \cdot 10^{-14}$	
		4	42	$1 \cdot 10^{-8}$	6	51	$8 \cdot 10^{-9}$		60	$5 \cdot 10^{-11}$	8	77	$5 \cdot 10^{-12}$		76	$2 \cdot 10^{-14}$	11	105	$2 \cdot 10^{-15}$	
		16	35	$2 \cdot 10^{-8}$	6	51	$2 \cdot 10^{-9}$		45	$1 \cdot 10^{-12}$	8	77	$1 \cdot 10^{-12}$		63	$1 \cdot 10^{-14}$	10	105	$5 \cdot 10^{-16}$	
	1/4	1/4	61	$4 \cdot 10^{-9}$	7	51	$2 \cdot 10^{-7}$		75	$1 \cdot 10^{-10}$	10	77	$1 \cdot 10^{-10}$		115	$2 \cdot 10^{-15}$	12	105	$5 \cdot 10^{-14}$	
		1	48	$2 \cdot 10^{-9}$	7	51	$3 \cdot 10^{-8}$		66	$9 \cdot 10^{-12}$	9	77	$2 \cdot 10^{-11}$		88	$4 \cdot 10^{-14}$	11	105	$1 \cdot 10^{-14}$	
		4	40	$2 \cdot 10^{-8}$	6	51	$6 \cdot 10^{-9}$		60	$4 \cdot 10^{-11}$	8	77	$4 \cdot 10^{-12}$		76	$3 \cdot 10^{-14}$	10	105	$2 \cdot 10^{-15}$	
		16	35	$2 \cdot 10^{-8}$	6	51	$1 \cdot 10^{-9}$		45	$5 \cdot 10^{-12}$	8	77	$8 \cdot 10^{-13}$		63	$5 \cdot 10^{-15}$	10	105	$3 \cdot 10^{-16}$	

浦の振動関数に対する振動型 DE 公式+Euler 変換の
 積分法¹⁸⁾と比較した.

$$\begin{aligned}
 Int_1 &= \int_0^\infty 1/(x^2 + a^2)^{1/2} J_\nu(\omega x) dx \\
 &= I_{\nu/2}(a\omega/2) K_{\nu/2}(a\omega/2), \quad a > 0, \omega > 0, \\
 Int_2 &= \int_0^\infty \exp(-ax) J_\nu(\omega x) dx \\
 &= \frac{\omega^{-\nu} (\sqrt{a^2 + \omega^2} - a)^\nu}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad a > 0, \omega > 0, \\
 Int_3 &= \int_0^\infty \frac{\exp[-(a^2 + x^2)^{1/2}]}{\sqrt{a^2 + x^2}} J_\nu(\omega x) dx \\
 &= I_{\nu/2}(\frac{a}{2}(b-1)) K_{\nu/2}(\frac{a}{2}(b+1)), \\
 &\quad b = \sqrt{1 + \omega^2}, \quad a > 0, \quad \omega > 0, \\
 Int_4 &= \int_0^\infty \frac{x^{\nu+1}}{x^2 + a^2} J_\nu(\omega x) dx = a^\nu K_\nu(a\omega),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &> 0, \quad \omega > 0, \\
 Int_5 &= \int_0^\infty x^a J_\nu(\omega x) dx \\
 &= 2^a \omega^{-a-1} \frac{\Gamma(1/2 + \nu/2 + a/2)}{\Gamma(1/2 + \nu/2 - a/2)}, \\
 &\quad -\nu - 1 < a < 1/2, \quad \omega > 0,
 \end{aligned}$$

ここで, テスト用の積分 $Int_1, Int_2, Int_3, Int_4, Int_5$ は, それぞれ Gradshteyn ら¹⁷⁾の (6.552.1), (6.611.1), (6.637.1), (6.566.2), (6.561.14) から用いている. それぞれの式の右辺の $I_\nu(x), K_\nu(x), \Gamma(x)$ は第 1 種, 第 2 種変形ベッセル関数とガンマ関数で, これらの値は NUMPAC¹⁹⁾を用いて計算した. 表 1, 表 2 には, 3 種類の要求精度 ϵ に応じて, それぞれのパラメータ a と振動数 ω の値に対する本積分法のテスト結果と大浦による結果を比較して示す. ここで,

本方法 (Present) の計算回数, すなわち, $Q_1(\omega)$ と $Q_2(\omega)$ (7) の総標本点数 N , $Q_2(\omega)$ (9) で修正 W 変換の半周期積分項 $\psi(x_l)$ (16) を計算した数 M および結果の絶対誤差 error を表 1, 表 2 に示し, 大浦の計算法 (Oura) の標本点数 N と絶対誤差も示す. 表 1, 表 2 より, 区間 $[c/\omega, \infty)$ での積分計算では, 修正 W 変換が大変速く収束するので, 要求精度 ϵ_2 を達成するのに, $[-\log_{10} \epsilon_2] + 2$ 個の積分 $\psi(x_l)$ (6 章参照) で十分であることが分かる. 一方, 表 1, 表 2 から大浦の計算法の結果と比べて, 同じ要求精度を満足するのに本方法での標本点数の方がほとんどの場合に少ないことが分かる.

本論文では, いわばはじめての自動積分法の例 ($\nu = 1/4$) である. 実数次数 ν がより広い範囲に適用されるようにすることは, 残された課題である.

謝辞 貴重なコメントをいただいた 2 人の審査員の方々と比較対象のアルゴリズムを頂戴した京都大学数理解析研究所の大浦拓哉博士に深く感謝いたします.

参 考 文 献

- 1) Linz, P.: A method for computing Bessel function integrals, *Math. Comp.*, Vol.26, pp.509–513 (1972).
- 2) Longman, I.M.: Tables for rapid and accurate numerical evaluation of certain infinite integrals involving Bessel Function, *MTAC*, Vol.11, pp.166–180 (1957).
- 3) Sidi, A.: The numerical evaluation of very oscillatory infinite integrals by extrapolation, *Math. Comp.*, Vol.38, pp.517–529 (1982).
- 4) Piessens, R.: Computing integral transforms and solving integral equations using Chebyshev polynomial approximations, *J. Comp. Appl. Math.*, Vol.121, pp.113–124 (2000).
- 5) 緒方秀教, 杉原正顕: Bessel 関数の零点を標本点を持つ補間および数値積分公式, 日本応用数理学会論文誌, Vol.6, No.1, pp.39–66 (1996).
- 6) Hasegawa, T. and Sidi, A.: An automatic integration procedure for infinite range integrals involving oscillatory kernels, *Numerical Algorithms*, Vol.13, pp.1–19 (1996).
- 7) Hasegawa, T. and Torii, T.: Indefinite integration of oscillatory function by the Chebyshev series expansion, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.17, pp.21–29 (1987).
- 8) Sidi, A.: A user-friendly extrapolation method for oscillatory infinite integrals, *Math. Comp.*, Vol.51, pp.249–266 (1988).
- 9) 長谷川武光, 鳥居達生: ベキ型特異性を持つ関数の不定積分に対する自動積分法, 日本応用数理学会論文誌, Vol.1, No.1, pp.1–11 (1991).
- 10) Luke, Y.L.: *Mathematical Functions and Their Approximations*, Academic Press, New York (1975).
- 11) Hasegawa, T., Torii, T. and Sugiura, H.: An algorithm based on the FFT for a generalized Chebyshev interpolation, *Math. Comp.*, Vol.54, pp.195–210 (1990).
- 12) Sidi, A.: An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation, *Math. Comp.*, Vol.38, pp.299–307 (1982).
- 13) Hasegawa, T. and Torii, T.: An algorithm for nondominant solutions of linear second-order inhomogeneous difference equations, *Math. Comp.*, Vol.64, pp.1119–1214 (1995).
- 14) Clenshaw, C.W. and Curtis, A.R.: A method for numerical integration on an automatic computer, *Numer. Math.*, Vol.2, pp.197–205 (1960).
- 15) Gentleman, W.M.: Implementing Clenshaw-Curtis quadrature II, Computing the cosine transformation, *Comm. ACM*, Vol.15, pp.343–346 (1972).
- 16) Elliott, D.: Truncation errors in two Chebyshev series approximations, *Math. Comp.*, Vol.19, pp.234–248 (1965).
- 17) Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M.: *Table of Integrals, Series, and Products*, Sixth Edition, Translated by Jeffrey, A. and Zwillinger, D., Academic Press (2000).
- 18) <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~oura/>
- 19) <http://netnumpac.fuis.fukui-u.ac.jp>

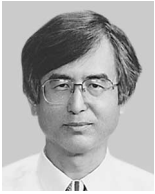
(平成 13 年 5 月 23 日受付)

(平成 14 年 2 月 13 日採録)

蘇 峰



1968 年生. 1989 年中国広州市中山大学大気科学系卒業. 同年から中国国内モンゴル電力試験研究院に勤務. 1998 年福井大学大学院情報工学専攻修士課程修了. 現在, 同大学院工学研究科博士後期課程システム設計専攻在学中. 数値積分に関する研究に従事.



長谷川武光 (正会員)

1944 年生. 名古屋大学大学院博士
課程単位修得退学 (1972 年). 工学
博士, 福井大学工学部情報・メディ
ア工学科教授. 主たる研究テーマは
数値解析, 数学ソフトウェアおよび
インターネット上での数値計算環境の構築. 著書には
「数理科学論文ハンドブック」(共訳). 日本応用数理
学会, 日本物理学会, AMS, IEEE (Computer) 各
会員.
