Dempster-Shafer理論の近似計算手法

3G-1

大塚尚宏、河原井茂義

(アンリツ株式会社)

1. はじめに

Dempster-Shafer理論[1]はあいまいな知識を表現する手法としてエキスパートシステムに応用されてきた。しかし、複数の知識から結論を導く際に用いられるDempsterの結合則の計算量が事象の数に対して指数関数のオーダで増加することが制約となり実用化が妨げられてきた。個々の知識の表現である基本確率に制限を設けることによりDempsterの結合則の計算量が多項式のオーダになることが示されたが[2,3]、基本確率に対する制限が厳しすぎるため利用できる応用範囲は限定される。本稿では、より一般化された基本確率に対し、それらの結合演算を幾何学的に解釈して信用度を求める理論式を導き、その理論式の近似計算法を提案する。

2. 信用度の近似計算法

2.1 基本確率の制限

一般に基本確率mは事象の全体集合Θの部分集合A_i(ここではΘは有限集合とする)に対して区間[0,1]内の値を取りその総和が1である関数であるが、以下の議論では基本確率が0でない値をもつ部分集合A_iが、$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$なる関係を満たすものと仮定する。この関係を満たす基本確率に対応する信用度関数はconsonant support functionと呼ばれており、その特殊例($A_2=\Theta$ or $n=1$)としてsimple support functionを含む。信用度関数のクラスのうち実用上重要なのは、separable support functionとsupport functionであるが、前者はsimple support functionの結合として表すことができるため、分離されたsimple support functionに対して以下の議論が適用できる。

2.2 基本確率の幾何学的解釈

区間[0,1]を基本確率が0でない値をもつ部分集合A_iの大きい順に長さ$m(A_i)$で分割すると、事象θ_iの尤度注はθ_iを含む部分集合に対応する区間の長さの総和となり、信用度はθ_iのみを要素とする集合に対応する区間の長さとなる。$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$なる関係が成り立つのですべての$\theta_i$に対して0を始点とする区間(以下$\theta_i$に対する尤度区間と呼ぶ)が一意的に定まり、その区間の長さがθ_iの尤度となる。Dempsterの結合則は2つの基本確率m_1, m_2を2次元平面上のm_1軸およびm_2軸上の区間[0,1]に割り付けたとき、Θの部分集合A_iに対応するm_1軸上の区間とΘの部分集合B_jに対応するm_2軸上の区間とから、A_iとB_jとの積集合$A_i \cap B_j$に対して2つの区間を各辺とする長方形の面積$m_1(A_i) \times m_2(B_j)$が結合確率に寄与することを表している。このとき、θ_iの尤度はm_1軸およびm_2軸上に定められた尤度区間を各辺とする長方形(以下尤度長方形と呼ぶ)の面積となり、θ_iの信用度はθ_iの尤度長方形からθ_i以外の事象に対する尤度長方形をそれぞれ除いた領域の面積となる。ただし、Dempsterの結合の際に空集合に対する寄与が生じた場合には正規化が必要となり、正規化定数はすべてのθ_iの尤度長方形の和集合の面積の逆数として求められる。以上の議論はN次元の場合に対しても容易に一般化することができ、θ_iの尤度は各軸に対する尤度区間を各辺とするN次元直方体の体積(以下θ_iに対する尤度直方体と呼ぶ)として、θ_iの信用度はθ_iに対する尤度直方体からθ_i以外の尤度直方体を除いた領域の体積として、正規化定数はすべてのθ_iに対する尤度直方体の和集合の体積の逆数として求められる。

注 正確にはθ_iのみを要素とする集合$\{\theta_i\}$に対する尤度(及び信用度)であるが、簡単のためθ_iの尤度(及び信用度)と書く。また、本稿では要素数1の集合に対する信用度および尤度の計算に議論を限定するが、一般の部分集合に拡張することも容易である。

2.3 信用度の理論式とその近似式

前節の議論からN個の基本確率を結合して得られる基本確率mに対する事象θ_iの信用度Bel、尤度Plおよび正規化定数Kは事象の数をMとしたとき以下の式で求められる。

Approximation Method for the Dempster-Shafer Theory

Takahiro Ohtsuka, Shigeyoshi Kawarai

Anritsu Corp.

$$Bel(\{\theta_i\}) = 1 - K\left\{ \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} V_j - \sum_{\substack{j<k \\ j \neq i \\ k \neq i}} V_{jk} + \cdots + (-1)^M V_{12\cdots(i-1)(i+1)\cdots M} \right\}$$

$$Pl(\{\theta_i\}) = KV_i$$

$$K = \left(\sum_j V_j - \sum_{j<k} V_{jk} + \cdots + (-1)^{M+1} V_{12\cdots M} \right)^{-1}$$

ここで、$V_{ij\cdots n}$は$\theta_i, \theta_j, \cdots, \theta_n$に対する尤度直方体の積集合の体積であり、積集合も$N$次元直方体となるから、体積は以下の式で求められる。

$$V_{ij\cdots n} = \min\{Pl_1(\{\theta_i\}), Pl_1(\{\theta_j\}), \cdots, Pl_1(\{\theta_n\})\} \times \cdots$$

$$\times \min\{Pl_N(\{\theta_i\}), Pl_N(\{\theta_j\}), \cdots, Pl_N(\{\theta_n\})\}$$

θ_iの信用度および正規化定数の計算の計算量は事象の数に対して指数関数のオーダとなっており、実用的ではない。一方、計算幾何学ではN次元空間のM個のN次元直方体の和集合の体積を求めるアルゴリズムとして$O(M^{N-1})$のものが最も高速なものとして知られているのみである。そこで、信用度および尤度の近似値を効率的に計算するために、信用度および正規化定数の計算で必要となる尤度直方体の和集合の体積を求める計算式を以下のように近似することを提案する。

$$Vol^{\downarrow} = \sum_i V_i - \sum_{i<L} V_{iL} - \sum_{L<i} V_{Li} - \sum_{\substack{i<j \\ i \neq L \\ j \neq L}} (V_{ij} - V_{ijL})$$

ここで、Lは尤度直方体の体積V_iが最大である事象θ_iのインデクスである。この式は、すべての尤度直方体の和集合の体積の近似式であるが、ある尤度直方体を除いた残りの尤度直方体の和集合の体積の近似式も総和からその尤度直方体のインデクスを除くことにより得られる。近似式の計算量は事象の数Mに対して二乗のオーダであり、飛躍的に効率化が計られている。近似値$Vol^{\downarrow}$と真値Vol $(=K^{-1})$との間には以下の関係が成り立ち、

$$Vol^{\downarrow} \leqq Vol$$

近似値の誤差は任意の3つの尤度直方体の積集合についてすべての組合せの和集合から体積が最大である尤度直方体を差し引いた集合の体積となる。したがって、任意の3つの尤度直方体の積集合が体積が最大である尤度直方体に包含されるときには近似値は真値と一致する。すなわち、各基本確率が整合的であるときには、近似式は正規化定数の良い近似を与える。

既に開発した回転機械の異常診断エキスパートシステム[4]の知識ベースを用いてシミュレーションを行ったところほとんどの事例で信用度と尤度の近似値は真値と良く一致していることが分かった。近似式の誤差が影響するのは、結合される基本確率が整合的であるときの、尤度が最大となる事象の信用度の値、及び結合される基本確率が矛盾するときの正規化定数の値に対してであるが、誤差は小さく診断結果には影響しない。より精度が求められる応用に対しては、近似を3つ以上の尤度直方体の積集合の体積まで考慮するように拡張することにより対処できる。

3. まとめ

エキスパートシステムの確信度計算で用いられるDempster-Shafer理論の尤度および信用度の近似計算法を提案した。この近似計算法は十分に一般的な信用度関数のクラスに対して適用でき、従来の計算法の計算量が事象の数に対して指数関数のオーダで増加したのに対し、多項式のオーダとなることから、飛躍的に効率化が計られる。シミュレーションを行い理論値と良く一致することが分かり、エキスパートシステムへの応用が可能であることが明らかになった。

最後に、本研究の機会を与えて頂いた当社第一研究所長佐分利義和氏および研究部長中川裕雄氏に深く感謝いたします。

参考文献

[1] G. Shafer: A mathematical theory of evidence, Princeton University Press, 1976.

[2] J. A. Barnett: "Computational methods for a mathematical theory of evidence", 7thIJCAI, pp. 868-875, 1981.

[3] G. Shafer, and R. Logan: "Implementing Dempster's Rule for Hierarchical Evidence", Artificial Intelligence vol. 33, pp. 271-198, 1987.

[4] 中嶋他: "回転機械診断エキスパートシステム", 電子情報通信学会計測自動制御学会九州支部共催信頼性研究会, 昭和62年10月.