連立非線形方程式の一求解アルゴリズム

7B-4

新田正樹　　磯部豊作

(芝浦工業大学)

§1．はじめに

我々が、計算機を用いて連立非線形方程式を解の第一近似を必要とする数値処理法（例Newton法）で求解する際、多変数になるほど初期値の選び方が問題となり、一般に困難である。そこで、本稿は初期値の選び方から生じる困難さの軽減を狙うために陰関数定理を利用することにより多変数を一変数化し、収束範囲の拡張を図る目的の変形Newton-Raphson法を組み合わせた求解アルゴリズムを提案する。

§2．変数消去の概要

n元連立非線形方程式

$$f_i(x_1,\cdots,x_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad \text{— (1)}$$

を考える。ただし、$f_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は、C^2-級の関数である。

<陰関数定理の利用>

$x_1^*\in R$，$x_1=x_1^*$とし、$f_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(i=2,\cdots,n)$ に代入し、n-1元連立非線形方程式

$$f_i(x_1^*,x_2,\cdots,x_n)=0 \quad (i=2,\cdots,n) \qquad \text{— (2)}$$

を考える。1つの解を$(x_2^*,\cdots,x_n^*)\in R$とする。

$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=2,\cdots,n)$は、$(x_1^*,\cdots,x_n^*)$ とその近傍でC^2-級に属し、$f_i(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)=0$,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

ならば、$x_i^*=g_{i-1}(x_1^*)$, $f_i(x_1,g_1(x_1),\cdots,g_{n-1}(x_1))$ $(i=2,\cdots,n)$を満たす$x_i=g_{i-1}(x_1)$ $(i=2,\cdots,n)$ が決まり、(3)，(4)式が成立する。

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \quad\cdots\cdots \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx_1} = -\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \end{cases} \qquad \text{— (3)}$$

(3)式は、dx_i/dx_1 $(i=2,\cdots,n)$ を未知関数とするn-1元連立一次方程式となる。

(4)式は、(3)式より求めたdx_i/dx_1 $(i=2,\cdots,n)$ を代入するとd^2x_i/dx_1^2 $(i=2,\cdots,n)$を未知関数とするn-1元連立一次方程式となる。

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\frac{d^2x_i}{dx_1^2} = -\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + 2\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)\frac{dx_i}{dx_1} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_k}\right)\frac{dx_k}{dx_1}\frac{dx_i}{dx_1}\right) \\ \quad\cdots\cdots \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\frac{d^2x_i}{dx_1^2} = -\left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} + 2\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)\frac{dx_i}{dx_1} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right)\frac{dx_k}{dx_1}\frac{dx_i}{dx_1}\right) \end{cases} \qquad \text{— (4)}$$

(3)，(4)式を消去法で求解し、求めた関係dx_i/dx_1，d^2x_i/dx_1^2 $(i=2,\cdots,n)$ より、$f_1(x_1,\cdots,x_n)$ におけるx_1について微分すると(5)，(6)式を得る。

$$\frac{df_1}{dx_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx_1} \qquad \text{— (5)}$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx_1^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + 2\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\frac{dx_i}{dx_1} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\right)\frac{dx_k}{dx_1}\frac{dx_i}{dx_1} + \sum_{i=2}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{d^2x_i}{dx_1^2} \qquad \text{— (6)}$$

$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ において、$f_1(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 及び(5)，(6)式を特定の方法で利用する場合、f_1は変数x_1のみの関数と見なせ、多変数を一変数化したと考えられる。

§3．Newton-Raphson法の拡張

本研究室で開発中の収束範囲の拡張を目的とする変形Newton-Raphson法［1］のアルゴリズムを簡単に紹介する。

Type 1.$(f(x^{(j)})\cdot f'(x^{(j)})>0)$

$$x^{(j+1)}=x^{(j)}+k(x^{(j)})\cdot\left|\frac{f(x^{(j)})}{f'(x^{(j)})}\right|\cdot \mathrm{SIGN}^{(j)} \qquad \text{— (7)}$$

$$k(x^{(j)})=1-\mathrm{EXP}(-1/|X^{(j)}|) \qquad \text{— (8)}$$

$$X^{(j)}=\frac{f(x^{(j)})\cdot f''(x^{(j)})}{(f'(x^{(j)}))^2} \qquad \text{— (9)}$$

Type 2.$(f(x^{(j)})\cdot f'(x^{(j)})<0)$

$$f_n(x^{(j)})=(f_m(x))^2/f(x^{(j)}) \qquad \text{— (10)}$$

（$f_m(x)$:$f(x^{(j)})\cdot f'(x^{(j)})<0$ を示した始点の f値）

$f'_n(x^{(j)})$, $f''_n(x^{(j)})$ を求め、$f'(x^{(j)})=f'_n(x^{(j)})$, $f''(x^{(j)})=f''_n(x^{(j)})$ とし、(7),(8),(9)式を利用する。

Type 3.$(f'(x^{(j)})\fallingdotseq 0)$

$$x^{(j+1)}=x^{(j)}+\varepsilon\cdot \mathrm{SIGN}^{(j)} \quad (\varepsilon：微小正定数) \qquad \text{— (11)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{SIGN}^{(0)}=+1,-1\ (\text{探索方向の指標}) \\ f(x^{(j)})\cdot f'(x^{(j)})>0\text{の場合}\quad \mathrm{SIGN}^{(j)}=\mathrm{SIGN}^{(j-1)} \\ f(x^{(j)})\cdot f'(x^{(j)})<0\text{の場合}\quad \mathrm{SIGN}^{(j)}=-\mathrm{SIGN}^{(j-1)} \end{array}\right.$$

An Algorithm for Solving Systems of Non-linear Equations

Masaki Nitta , Toyosaku Isobe

Shibaura Institute of Technology

この変形Newton-Raphson法は、(8), (9)式が示すように Newton-Raphson法の収束条件に着目した一種の減速法であり、求解時の各変数における探索方向を与えるために指標SIGNを導入し、収束範囲の拡張を目的とした方法である。

§4．アルゴリズムの提案

求解すべきn元連立非線形方程式を

$f_i(x_1,\cdots,x_n)=0 \quad (i=1,\cdots,n)$

とする。ただし、$f_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,\cdots,n)$ はC^2-級の関数である。

S1. x_1の初期値$x_1^{(0)}$, 探索方向$SIGN_1^{(0)}$, x_iの仮初期値$x_i^{(0)}$, 仮探索方向$SIGN_i^{(0)}(i=2,\cdots,n)$ と定義しそれぞれを与える。$(p=0, L(i)=0(i=1,\cdots,n-1), J=1)$

S2. $f_n(x_1^{(L(n-1))},x_2^{(L(n-2))},\cdots,x_{n-1}^{(L(1))},x_n)=0$となる$x_n$を$x_n^{(0)}$, $SIGN_n^{(0)}$より、§3のType1~3を使用し求め、$x_n^*=x_n^{(\cdot)}$とする。必要ならば探索方向を変える。$SIGN_n^*=SIGN_n^{(\cdot)}$とする。

S3. もし、$L(J)=0$ならば

$f_i(x_1^{(0)},\cdots,x_{n-p-1}^{(0)}+\Delta\cdot SIGN_{n-p-1}^{(0)},x_{n-p},\cdots,x_n)=0$ $(i=n-p,\cdots,n)$（Δ：微小正定数）となる$x_{n-p},\cdots,x_n$を初期値$x_{n-p}^*,\cdots,x_n^*$とし、Newton法（p=0の場合Newton-Raphson法）より求め、$x_{n-p}^*,\cdots,x_n^*$とそれぞれ比較し探索方向を予想し、$SIGN_{n-p}^*,\cdots,SIGN_n^*$とする。

S4. $f_i(x_1^{(L(n-1))},\cdots,x_{n-p-1},\cdots,x_n)=0(i=n-p-1,\cdots,n)$において、$x_{n-p-1}^{(L(p+1))}$と$x_{n-p}^*,\cdots,x_n^*$の関係が§2における陰関数定理の利用の条件を満たさなければ停止。もし、$x_{n-p-1}^{(L(p+1))}$が収束しないならば、$SIGN_{n-p-1}^{(L(p+1))}$, $f_{n-p-1}(x_1^{(L(n-1))},\cdots,x_{n-p-1}^{(L(p+1))},x_{n-p}^*,\cdots,x_n^*)$,(5), (6)式より求めた微分値を使用し、§3のType1~3 より次点$x_{n-p-1}^{(L(p+1)+1)}$を求解する。必要ならば探索方向を変える。$x_i^{(0)}=x_i^*$, $SIGN_i^{(0)}=SIGN_i^*(i=n-p,\cdots,n)$, $L(i)=0(i=1,\cdots,p)$ $(p\geqq 1)$,$L(p+1)=L(p+1)+1$, $p=0$としS2へ戻る。そうでなければ、$x_i^{(0)}=x_i^*$, $SIGN_i^{(0)}=SIGN_i^*$, $(i=n-p,\cdots,n)$, $x_{n-p-1}^*=x_{n-p-1}^{(L(p+1))}$, $SIGN_{n-p-1}^*=SIGN_{n-p-1}^{(L(p+1))}$, $x_{n-p-1}^{(0)}=x_{n-p-1}^*$, $SIGN_{n-p-1}^{(0)}=SIGN_{n-p-1}^*$とする。

S5. もし、$J\neq p+1$ ならば、$p=p+1$ としS4へ戻る。そうでなければ、$p=J$, $J=J+1$とする。

S6. もし、$J\leqq n-1$ ならばS3へ戻る。そうでなければ終了。

§5．結果・考察

この節は、§4において提案したアルゴリズムによって例題を解き、求解結果を用いてアルゴリズムを検討する。

<例> $\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2^2-9 \\ f_2(x_1,x_2)=2x_1^2-2x_1x_2^2+6 \end{cases}$ において、$f_1=0$, $f_2=0$ となるx_1,x_2を求めよ。（初期条件：$x_1^{(0)}=1.5$, $SIGN_1^{(0)}=-1$, $x_2^{(0)}=1.0$, $SIGN_2^{(0)}=-1$ ）

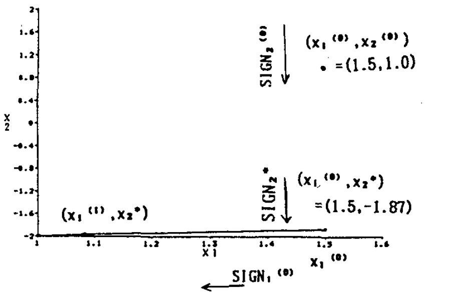

図1．$f_2(x_1,x_2)=0$を満たすx_1とx_2の関係図

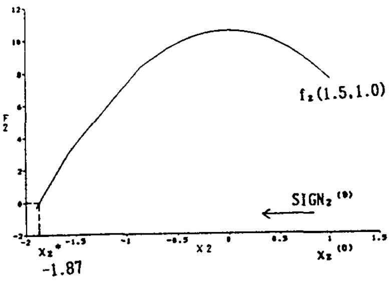

図2．x_2と$f_2(1.5,x_2)$の関係図

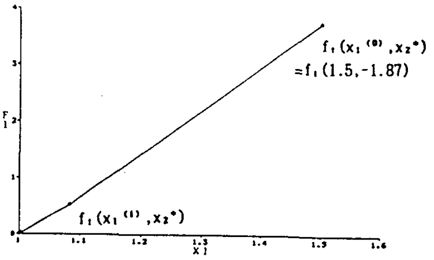

図3．x_1と$f_1(x_1,x_2)$の関係図

例題の求解結果は、図1~3 に示す。文末の(S·)は§4アルゴリズムのStepを表す。初期条件を図1に示す（S1）。

初期値$(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$は$f_2=0$を満たしていない。そこで、$x_1^{(0)}$を固定し$f_2(x_1^{(0)},x_2)=0$となるx_2を$x_2^{(0)}$, $SIGN_2^{(0)}$の条件で§3 Type1~3を用いて求解しx_2^*とする。途中結果は図2に示す。点$(x_1^{(0)},x_2^*)$は陰関数定理を利用する際、重要な意味を持つ(S2)。ここで使用された$SIGN_2^{(0)}$は、x_2^*を求める指標であるためにx_1を求解するためのx_2の指標$SIGN_2^*$を求める(S3)。

陰関数定理の前提条件が満たされているため、次点$x_1^{(1)}$を求める(S4)。一連の操作を繰り返すとx_1,x_2が求まる。

図3は、陰関数定理より、$x_2=g_1(x_1)$の関係が成立しているためf_1はx_1のみで得ることができる。図3において、x_1が$f_1(x_1,x_2)=0$を示すとき、x_2は既に求解されている。

§6．おわりに

本稿では2元連立方程式を§4アルゴリズムを用いて求解したが、2元以上の連立方程式に適用する場合でも多変数を一変数化するために2元時と変わりなく求解することができる。

〔参考文献〕

［1］T.Isobe,IEEE Trans.on Automatic Control AC32, pp.63-67,1987.