スパンニングキャタピラ問題について

5B-6

大川　知

八戸工業大学

1．はじめに　計算機ネットワークの構成に関連したグラフの問題についていくつかの結果が得られたので報告する。

2．準備　グラフ、問題、言語、計算量などに関する基本的な用語については文献（1）（2）などを参照されたい。木Ｔｃ＝（Ｖ，Ｅ）がキャタピラ（catapillar）であるとは、Ｔｃから次数１の点を除去して得られるグラフ（すなわち、Ｖ’＝Ｖ－｛ｖ｜ｄ（ｖ）＝１｝、Ｅ’＝Ｅ∩（Ｖ’×Ｖ’）とするとき、Ｔ’＝（Ｖ’，Ｅ’）なるグラフ）が道となるグラフである。あきらかに、道、スターグラフもキャタピラである。キャタピラＴｃの長さを｜Ｅ’｜で表わすことにする。グラフＧ＝（Ｖ，Ｅ）のスパンニングキャラピラとは、キャタピラになっているＧのスパンニングツリーである。次に、本稿で扱う問題を定義する。

ＳＣ問題：グラフＧが与えられたとき、Ｇにスパンニングキャタピラが存在するかどうかを判定せよ。

ＭＳＣ問題：グラフＧ＝（Ｖ，Ｅ）と整数ｋが与えられたとき、Ｇに長さｋ以下のスパンニングキャタピラが存在するかどうかを判定せよ。

3．結果　前節で定義した問題について、どちらもＮＰ－完全であること示す。

［定理１］　ＳＣ問題はＮＰ－完全である。

（証明）　ＳＣ問題がＮＰに属すことはあきらかである。ＮＰ－完全であるグラフのハミルトン道問題が多項式時間でＳＣ問題に変換できることを示す。ハミルトン道問題の任意のインスタンスＧ＝（Ｖ，Ｅ）において、ｄ（ｖ）＝１の点はないものとして一般性を失わないから、Ｇをそのようなグラフであるとする。ここで、$\hat{V}=V\cup\{v'\mid v\in V\}$，$\hat{E}=E\cup\{(v,v')\mid v\in V\}$とし、$\hat{G}=(\hat{V},\hat{E})$を構成し、これをＳＣ問題の入力とする。すると、次の命題が成立つことはあきらかであるから、ＳＣ問題はＮP-完全である。

［命題］　Ｇにハミルトン道が存在する必要十分条件は$\hat{G}$にスパンニングキャタピラが存在することである。

［系１］　ＭＳＣはＮＰ完全である。

（証明）　定理の証明において、Ｇのスパンニングキャタピラの長さが｜Ｖ｜－１となることからあきらかである。

4．むすび　計算機ネットワークの構成に関連したグラフにスパンニングキャタピラが存在するかどうかの判定問題について検討し、それがＮＰ－完全であることを示した。その証明から、この問題に次数４以下のグラフに対してＮＰ－完全であることもあきらかである。

文献（１）F.Harary,Graph Thory,Addison-Wesley,1969.（２）M.R.Garey,D.S.Johnson,Computers and Intractability,W.H.Freeman and Company,1979

On the Spanning Caterpillar Problems

Satoshi OKAWA

Hachinohe Institute of Technology