4B-3

代用電荷法とＮｅｗｔｏｎ法に基づく外部逆等角写像の誤差評価法

天野 要　高松孝安　安倍 齊
（愛媛大学工学部）

1．まえがき　代用電荷法に基づいて，与えられた領域から標準領域への等角写像を簡単かつ高精度に計算することができる[1-3]．この方法は，また，Newton 法との結合によって，その逆写像をも比較的簡単かつ高精度に計算することが可能である[4,5]．このとき，問題の領域が有界であれば，正則関数の最大値の原理の直接的な結果として，誤差は境界上で最大値をとることがわかる．しかし，外部問題の場合には，問題の領域は写像関数の一意性を保証する正規化点として無限遠点を含む．ここでは，外部逆写像の場合にも，正則関数の最大値の原理だけでなく，写像関数に固有の性質をも利用することによって，境界上の計算値のみを用いた簡潔な誤差の評価が可能であることを示す．

2．外部等角写像と逆写像の計算法の概要[5]　与えられた Jordan 領域の外部から単位円の外部への等角写像 $w=f(z)$ は，正規化条件 $f(\infty)=\infty$，$f\,(\infty)>0$ の下に，一意的に定まる．代用電荷法に基づいて，この写像関数を

$$W=F(z)=z\,\exp\{G(z)-\log r+iH(z)\} \tag{1}$$

$$G(z)=-\sum_{i=1}^{N}Q_i\log|z-\zeta_i| \tag{2}$$

$$H(z)=-\sum_{i=1}^{N}Q_i\arg(z-\zeta_i) \tag{3}$$

と簡潔かつ高精度に近似することができる．ζ_i は問題の領域の外部に配置された電荷点であり，未定係数である電荷 Q_i と領域の容量 r は連立１次方程式

$$\left|\begin{array}{cc} & 1\\ \log|z_j-\zeta_i| & \vdots\\ & 1\\ 1\ \cdots\ 1 & 0\end{array}\right|\left|\begin{array}{c} \\ Q_i\\ \\ \log r\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c} \\ \log|z_j|\\ \\ 0\end{array}\right| \tag{4}$$

の解である．z_j は境界上の拘束点である．これを

$$F(z)=R(z)\exp\{i\theta(z)\}=\exp\{P(z)+i\theta(z)\} \tag{5}$$

と分解すれば，$R(z)$，$\theta(z)$ または $P(z)$，$\theta(z)$ とその導関数は，差分近似を用いることなく，簡潔に表現される．$P(z)=\rho_c(\geqq 0)$，$\theta(z)=\theta_c$ $(-2\pi<\theta_c\leqq 2\pi)$ に Newton 法を適用して問題の外部逆等角写像の数値解 z_k を得る．

3．誤差　補題　問題の写像関数について，不等式

$$\min_C|zf'(z)|\leqq 1 \tag{6}$$

が成立する．証明は背理法による．境界 C 上で

$$|zf'(z)|>1 \tag{7}$$

と仮定し，w 平面上の単位円に沿う線積分を考えると，

$$\oint_C|dw|=\oint_C|f'(z)dz|\geqq\oint_C|zf'(z)||d\theta| \\ \geqq\oint_C|zf'(z)|d\theta>2\pi \tag{8}$$

となって，C が単位円に移ることに矛盾する．

なお，C が原点に対し starlike である必要はない．また，内部写像関数についても同じ不等式が成立する．

誤差の評価式　近似写像関数の精度が高く[2]，

$$\varepsilon_F\equiv\max_C|F(z)-f(z)|\ll 1 \tag{9}$$

のみならず，

$$E_F\equiv\max|(F^{-1}(w)-f^{-1}(w))/f^{-1}(w)|\ll 1 \tag{10}$$

であれば，正則関数の最大値の原理により，問題の外部逆写像の相対誤差について

$$E_R(z)\equiv|(z_k-f^{-1}(w))/f^{-1}(w)| \\ \lessapprox(\varepsilon_N+\varepsilon_F)/\min\{\min_C|zF'(z)|,\ 1\} \tag{11}$$

という関係式を導くことができる．ε_N は Newton 法の要求精度である．さらに，その導関数の精度も高く，

$$\min_C|zF'(z)|\fallingdotseq\min_C|zf'(z)| \tag{12}$$

であれば，補題の結果から，

$$E_R(z)\lessapprox(\varepsilon_N+\varepsilon_F)/\min_C|zF'(z)| \tag{13}$$

を得る．これらの条件の成立は数値実験的に確認することができる．

参考文献

1）天野：情学論，28（7），697-704（1987）．
2）天野：情学論，29（1），62-72（1988）．
3）天野：情学論，29（10），914-924（1988）．
4）天野，高松，安倍：投稿中．
5）高松，天野，安倍：第37回全国大会，4D-4(1988)．

Error estimation of numerical inverse conformal mapping of exterior domains by the charge simulation method combined with Newton's method

Kaname AMANO, Takayasu TAKAMATSU and Hitoshi ABE (Ehime University)