# 問題解決法ガイダンスシステム

3B-7

竹谷 誠*1 中村 直人*1 伊藤 靖*2 寺田 文行*2
( *1拓殖大学 工学部 *2早稲田大学 理工学部 )

## 1．はじめに

学習者が数学の問題解決を通して学習すべきことを整理すると，問題解決の対象領域の知識と何の問題かを把握する，問題を分析する，方針を立案する，などの問題解決のための戦略的知識の学習がある．とくに後者の戦略的知識の獲得は数学教育からは数学的知性として欠くことのできないものである．筆者らはこれまでにそのような問題解決の戦略的知識を教授するための学習システムを検討してきた[1]．

今回は，高校数学の“式と計算”領域の“因数分解”を対象にこれまでのように戦略的知識を教授するのではなく，学習者と協調的に問題を解き戦略的知識を獲得することをガイドするシステムの開発を報告する．

## 2．問題解決と戦略的知識

高校数学における因数分解の問題を考えた場合，一般に以下の公式群を繰り返し適用することで問題を解決することができる．

［因数分解の公式］

① $ax+ay=a(x+y)$

② $x^2\pm 2xy+y^2=(x\pm y)^2$

③ $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

:

ところが，$x^2-yz+xz-y^2$というような問題の場合，単純に適用できる公式はなく，たとえば$x^2-y^2$というような部分多項式について公式を適用して解決しなければならない．

［解法．1］

$$
\begin{aligned}
&x^2-yz+xz-y^2\\
&=(x-y)z+x^2-y^2 \quad \text{《z中心に整理》}\\
&=(x-y)z+(x+y)(x-y)\\
&=(x-y)(x+y+z)
\end{aligned}
$$

数学のエキスパートについて考えてみるとこのような場合，やみくもに公式を適用していくのではなく問題の式を認識した時点で解決の方針を立案しているのである．この立案に使用する知識を戦略的知識（SK：Strategic Knowledge）と呼ぶ．このSKをもとにした因数分解の一般的解法のアルゴリズムは以下に示すとおりである．［解法．1］についてもこの一般的解法が適用されている．

［SKによる一般的解法］

1．次数に着目して，1文字中心に整理する．
  - 1-1.式の中のすべての文字（変数）を取り出す．
  - 1-2.各文字に対して単項式中の最大次数を求める．
  - 1-3.1-2で求めた次数が最小の文字を中心に降べきの順に整理する．
  - 1-4.1-3.の各項の係数が多項式の場合はその多項式を因数分解．

2．共通因数の処理をする．

3．公式の利用．

5．因数定理のあてはめをする．

4．分解された各因数について1の手順に．

本システムの学習者へのアドバイス及び解法提示のひとつの特徴はこのSKに沿った解法を提示することである．

## 3．一般的解法と発見的解法

学習者の解法をさらに検討・分析していくと同一の問題に対し，次の［解法．2］，［解法．3］のような異なる解法が得られた．

［解法．2］

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2-z^2+2xy\\
&=x^2+2yx+(y^2-z^2)\\
&=x^2+2yx+(y+z)(y-z)\\
&=(x+y+z)(x+y-z)
\end{aligned}
$$

---

A Guidance System for Problem-Solving
Makoto TAKEYA*1, Naoto NAKAMURA*1, Yasushi ITO*2 and Fumiyuki TERADA*2
*1Takushoku University *2Waseda University

［解法．３］

$$x^2+y^2-z^2+2xy$$
$$=(x^2+2xy+y^2)-z^2$$
$$=(x+y)^2-z^2$$
$$=(x+y+z)(x+y-z)$$

これらの２つの解法を検討すると［解法．２］は上述の一般的解法である．［解法．３］は学習者は問題解決の初期の時点でこの多項式が部分的に因数分解をすると$A^2-B^2$という公式が適用できることを予測している．このような予測を，与えられた多項式の公式との同一化と呼ぶ．

同一化は学習者の経験により高められると考える．そこで本システムはこの知識を高めることも目的としているのである．

なお，前述の［解法．１］についても同様に$A^2+(B+C)A+B\cdot C$と同一化して解く解法がある．

4．システムの実現

本システムの構成は図１に示したとおりである．

ここでは，とくに発見的解法のガイダンス方法について述べる．

まず，問題を一般的解法にて解き解答を得る．【解法モジュール】

その解答をもとに解法の逆の演繹（ここでは式の展開）により発見のガイダンスをする．たとえば，上述の［解法．３］のガイダンスでは解答の$(x+y+z)(x+y-z)$より$x+y$に着目した式の展開を行なって$(x+y)^2-z^2$をガイダンスするのである．【解法モニタ】

また，これらの解答の過程を記憶することで同様な発見的問題を作成することが可能である．【類題作成モジュール】

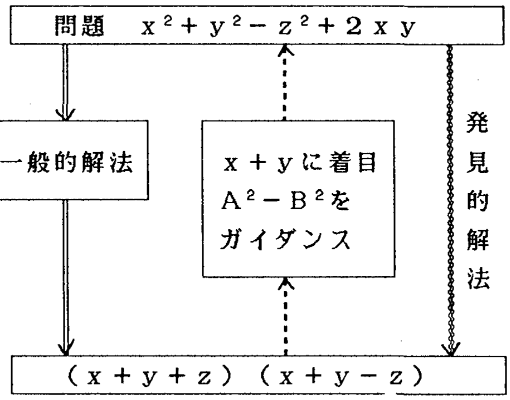


図２．発見的解法のガイダンス手順

5．今後の課題

本システムにおいて，現在学習者モデルを研究中であるが，ここでは一般的解法あるいは，因数分解公式のバグなどの治療を目的としたものでなく，学習者が発見的な解法の戦略をどの程度理解しているか，発見の基盤はどの程度かなどをシステムが理解するモデルを開発しなければならない．

今回は，因数分解を対象にシステムを開発したが，この一般的解法から発見的解法をガイダンスする方法による他分野への展開を検討していきたい．

［参考文献］

１）中村，竹谷他：数学的知性を涵養するためのコースウェア構成法，教育工学関連学協会連合第２回全国大会．pp.147-148 (1988-8).

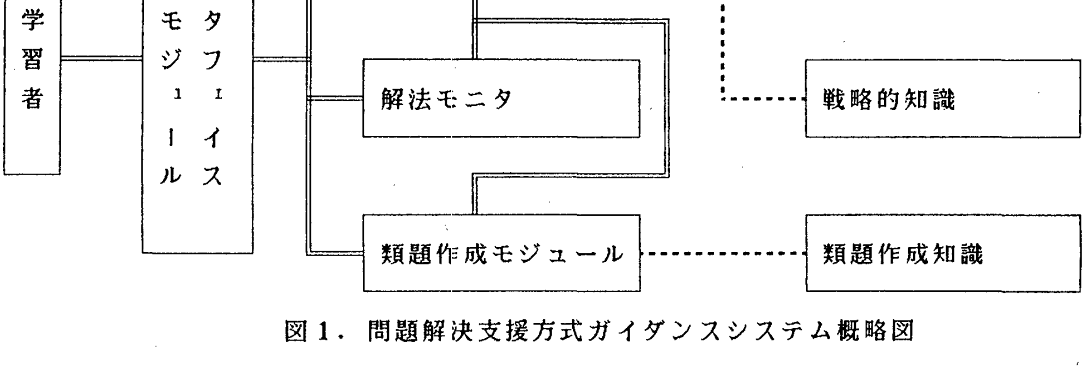


図１．問題解決支援方式ガイダンスシステム概略図